

Kleine Scriptie Singulariteiten

Duco van Straaten

Inhoudsopgave

	blz.
§0. Inleiding	1
§1. Morse theorie	3
§2. Afbeeldingen naar $\mathbb{R}^2$	7
2.1 Stelling	7
2.2 Voorbeelden	10
2.3 Toepassing	27
§3. Singulariteiten & Jet bundels	28
§4. Vector bundels	41
4.1 Het raaike rijtje	41
4.2 Gekantelde afgeleide	42
4.3 De vlag operatie	42
4.4 Intrinsieke afgeleide	43
4.5 Karakteristieke klassen	47
§5. Thom polynomen	65
5.1 Thom polynoom stelling	65
5.2 De 12 vrede Thom polynomen	71
5.3 Berekening v.b. Gysin klasse morfisme	76
5.4 Laatste stap	81
5.5 Enkele toepassingen	85
Appendices A, B, C & D.	97

§ 0. Inleiding

Singulariteitentheorie valt, heel algemeen gesproken uitdrukken in twee min of meer verschillende gebieden.

Ten eerste is er de locale theorie. Hierbij tracht men de locale structuur v.e. singulariteit (globaal!) te doorgronden. Men probeert normaal vormen in de buurt van singulariteiten te vinden en door middel van zinnige klassificatieschema's orde te scheppen in de chaos van verschillende typen singulier gedrag.

Daarnaast is er de globale theorie. Hierbij gaat men uit van de feiten van de locale theorie en probeert men verbanden te vinden tussen de topologie van variëteiten M en N en de singulariteiten van een $f: M \rightarrow N$.

Over enkele aspecten van deze globale theorie gaat deze scriptie.

In §1. wordt het eenvoudigste geval behandeld: Morse theorie van een $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. In §2. wordt Morse theorie gebruikt om een stelling over afbeeldingen naar $\mathbb{R}^2$ te bewijzen. §3. ~~behandelt~~ bevat de belangrijkste lemmen over de i de Thom strata S_r (en ook 2^e orde $S_{r,s}$) en worden Jetbundels geïntroduceerd. §4. is een omvattend geheel waarin enkele veel voorkomende vectorbundel constructies op een rijtje worden gezet.

uult als belangrijkste onderwerp een korte inleiding
in de theorie van karakteristische klassen.

Dit zijn vooral nodig in de laatste paragraaf voor
de formulering en het bewijs van de algemene
Thom polynoomstelling over de inclusie van
singulairiteiten typen. De eerste orde $\mathbb{Z}^i$ -thom-
polynomen worden uitgerekend, volgens de weg van
Porteous en Ronga. De scriptie besluit met enkele
voorbeelden en opmerkingen.

In deze scriptie zijn alle optredende afbeeldingen
 $f: M \rightarrow N$ zonder vermelding $\mathbb{C}^n$, en M en N gelyke
 $\mathbb{C}^n$ -variëteiten.

§1. Morse theorie

Laat $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ een C^∞ -afbeelding van een gladde n -dimensionale variëteit M naar $\mathbb{R}$.

f induceert een afgeleide afbeelding:

$df: TM \rightarrow T\mathbb{R}$ en een geadjungeerde vorm:

$$df: M \rightarrow TM^* = \text{HOM}(TM, \mathbb{R})$$

$$x \mapsto df_x: TM_x \rightarrow \mathbb{R}; v \mapsto df_x(v).$$

(df is een 1-vorm).

$\Sigma_f := \underline{df}^{-1}(0)$ heet de verzameling van kritieke punten.

Over een dergelijke verzameling voor zomaar een $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ is in het algemeen waarschijnlijk weinig te zeggen: 'bijna elke' gesloten deelverzameling kan optreden als kritieke verzameling.

(Welke verzamelingen wel en welke niet is nog een interessante vraag). Om toch vast op de structuur van Σ_f te krijgen kunnen we bepaalde condities aan f opleggen.

Definitie: $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ heet een Morse functie als $\underline{df}$ transversaal op de nulsnede van $\text{HOM}(TM, \mathbb{R}) = TM^*$ staat.

Dus als $\underline{df} \cap Z = \{ (x, 0) \mid x \in M \}$

Onder deze voorwaarde wordt Σ_f een gesloten n -dimensionale deelvariëteit van M , d.i. een discrete verzameling.

In een kritiek punt $x \in \Sigma_f$ kunnen we het volgende delen:

Neem de afgeleide van $\underline{df}$ in x . Dit levert:

$$d(\underline{df})_x: TM_x \rightarrow T(TM^*)_{\underline{df}(x)=0}$$

Langs de nulsnede is de raakruimte aan TM^* op natuurlijke wijze opgesplitst in de verelrichting en de basisrichting (zie § 4.1); $T(TM^*)_0 = TM_x \oplus TM_x^*$ voor $x \in \Sigma_f$

4. kijken we alleen naar de 2^e komponent van $d\tilde{f}$ dan krijgen we een afbeelding $D\tilde{f}_x: TM_x \rightarrow TM_x^*$ en een bijbehorende bilineaire vorm

$$H(f)_x: TM_x \times TM_x \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, w) \mapsto [D\tilde{f}(v)]w$$

de z.g. Hessiaan van f in $x \in \Sigma_f$

In lokale coördinaten $(x_1, \dots, x_n)$ voor een omgeving van $x \in M$ is $H(f)_x$ juist $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$

De conditie $d\tilde{f} \neq 0$ betekent precies dat $H(f)$ niet outdaard is. Onder deze voorwaarde heeft f in de buurt van x een simpele normaal vorm: (Morse Lemma)

In de buurt van een niet outdaard kritiek punt x zijn er coördinaten $(x_1, \dots, x_n)$ z.d.d. f er uit ziet als

$$f(x) = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} x_i^2 \quad (\text{zie bv. [9]})$$

Na een verdere lineaire coördinaten transformatie kan men de Hessiaan diagonaliseren; f verschijnt dan als

$$f = \pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_n^2$$

Definitie. De index $\text{Ind}(Q)$ van een kwadratische vorm Q op een vectorruimte E is de dimensie van een maximaal dimensionaal deelruimte waarop Q negatief definitief is (= aantal min tekenen in diagonale gedaante van Q). Voor een Morse punt x definiëren we: $\text{Ind}_f(x) = \text{Ind}(H(f)_x)$. Voor een absoluut maximaal hebben we dus $\text{Ind}_f(x) = \dim M$ en voor een absoluut minimum: $\text{Ind}_f(x) = 0$.

De volgende stelling geeft enig idee wat voor beperkingen de topologie van M aan een Morse functie f oplegt.

Stelling: Laat M compact, n -dimensionaal & glad. 5.

Noteer: $\nu_k = \# \{x \in M \mid \text{Ind}_f(x) = k\}$. Laat F een lichaam

en noteer: $\beta_k = \dim_F H_k(M; F)$.

Dan geldt:

A. (Morse ongelijkheden)

$$\nu_0 - \beta_0 \geq 0$$

$$\nu_1 - \beta_1 \geq \nu_0 - \beta_0$$

$$\nu_k - \beta_k \geq (\nu_{k-1} - \beta_{k-1}) - (\nu_{k-2} - \beta_{k-2}) + \dots + (-1)^{k+1}(\nu_0 - \beta_0)$$

B. (Morse gelijkheid)

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \nu_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i = \chi(M) \quad (\text{Euler karakteristiek})$$

Voor een bewijs van deze stelling zie [9] of [13]. Het idee is vrij eenvoudig: wanneer we over $\mathbb{R}$ lopen dan verandert de topologie van $f^{-1}(x)$ niet, zolang we geen kritische waarden overschrijden (dit volgt uit het integreren van het gradient veld van f). Bij kritische waarden gebeurt er wat. Volgens het Morse lemma is de situatie lokaal bekend en de verandering van topologie blijkt wel te komen op het aanhechten van een cel, etc.

Twee zeer triviale toepassingen: Laat $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ een Morse functie; M compact.

1. $\# \Sigma_f \equiv \chi(M) \pmod{2}$

2. f Morse $\Rightarrow -f$ Morse. Als $\dim M = 2k+1$ dan volgens

$$\nu_i(f) = \nu_{2k+1-i}(-f); \quad \chi(M) = \sum (-1)^i \nu_i(f) = \sum (-1)^{2k+1-i} (-1) \nu_{2k+1-i}(-f) = -\chi(M) \quad \text{of wel: } \chi(M) = 0$$

Twee feiten, die ook op andere gronden duidelijk zijn.

6. Samen met het feit dat de Morse functies op M een open en dicht deel van $C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ vormen, is bovenstaande stelling erg geschikt om topologische informatie over M te vinden.

Tot slot nog het volgende: door de transversaliteits eis d.f. $\pi: Z$ werd Z_f in één klap 0-dimensionaal. Als voor een gegeven $f: Z_f$ 'voldoende netjes' is, kunnen we toch nog iets doen:

Definitie: Een variëteit $V \subset M$ heet kritische en niet-afgedegen van index k als:

1. $V \subset Z_f$; d.w.z. elk punt van V is kritisch.
2. Als W een deelvariëteit $\subset M$ en $W \cap V$ dan heeft $f|_W$ voor $\forall x \in W \cap V$ een Morse punt van index k .

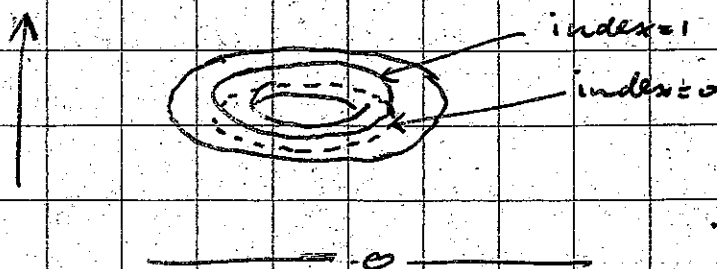
Laat nu $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ z.d.d. elk kritisch punt in een niet-afgedegen kritische variëteit zit (& M compact)

Dan geldt: $\boxed{\chi(M) = \sum (-1)^k \mu_k}$ waarbij

$\mu_k = \sum \chi(V)$, waarbij de som is over alle kritische variëteiten van index k . (Voor een bewijs zie opgave

6.3; 8 in [4]) Functies met een dergelijke nette kritische verzameling bieden nog vaak op; in het bijzonder in problemen met symmetrie. Het is dan 'zonde' om deze functies naar een Morse functie te storen.

Een voorbeeld is de 'verkeerde hoogte functie' op de torus:



We zullen nu Morse theorie toepassen om een stelling over afbeeldingen van een compacte n -dimensionale variëteit naar $\mathbb{R}^2$ te bewijzen.

Laat $\dim M \geq 2$ en $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$. Voor een residuale verzameling $F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$ zijn de singulariteiten van f van een eenzijdig type (zie ook § 3.)

1) Voor een open dicht deel $S_0(f) \subset M$ geldt dat:

$$x \in S_0(f) \Leftrightarrow df_x: TM_x \rightarrow \mathbb{R}^2; \text{ naar } f \text{ submersief in } x.$$

2) Het complement van $S_0(f)$ is een gladde 1-dimensionale variëteit $S_1(f)$ waar geldt:

$$x \in S_1(f) \Leftrightarrow \ker df_x \text{ is 1-dimensionaal.}$$

De variëteit $S_1(f)$ valt weer uiteen in 2 verzamelingen met verschillend singulier gedrag: $S_1(f) = S_{1,0}(f) \cup S_{1,1}(f)$

met: $x \in S_{1,0}(f) \Leftrightarrow x \in S_1(f) \ \& \ \dim(TS_{1,0}(f)_x \cap \ker df_x) = 0$ (afwel wat op het zelfde neerkomt $f|_{S_{1,0}}$ is immersief)

$$x \in S_{1,1}(f) \Leftrightarrow x \in S_1(f) \ \& \ \ker df_x \supset TS_{1,1}(f)_x$$

In deze situatie zijn er coördinaten $(x, y; x_i)$ voor M en coördinaten voor $\mathbb{R}^2$ z.d.d. $f = (f_1, f_2)$ met z.d.d. f de volgende normaalvormen heeft:

Voor een S_0 -punt : $f_1 = x$; $f_2 = y$

$$\Sigma_f = \begin{cases} S_{1,0}\text{-punt} & : \quad f_1 = x \ ; \ f_2 = \pm y^2 + \sum (-1)^{\epsilon_i} x_i^2 \\ S_{1,1}\text{-punt} & : \quad f_1 = x \ ; \ f_2 = \frac{1}{3} y^3 - xy + \sum (-1)^{\epsilon_i} x_i^2 \end{cases}$$

Voor deze normaalvormen zie [5].

Als $\dim M = 2$ staan hier juist de Whitney normaalvormen. Naar analogie noemen we de gladde S_1

kromme in M de voornlijen en hun beelden onder f de contouren van M onder f .

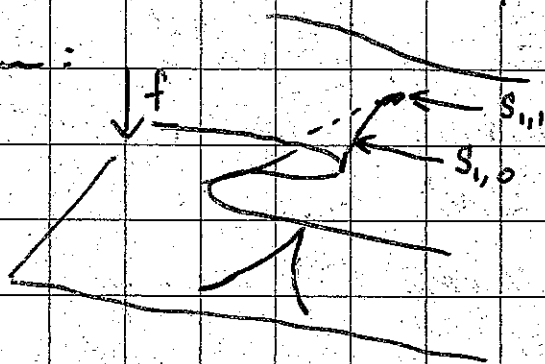
Mit de normale vormen leren we af:

$$\underline{x} \in S_{1,0} : f|_{\Sigma_f} : x \mapsto (x, 0)$$

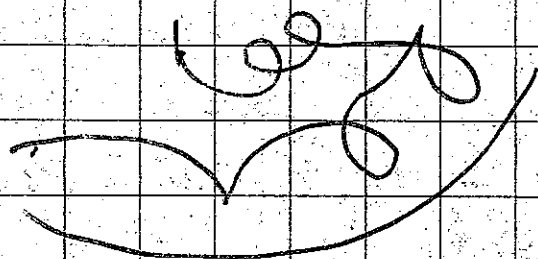
$$\underline{x} \in S_{1,1} : f|_{\Sigma_f} : y \mapsto (y^2, -\frac{2}{3}y^3)$$

Dus de kritieke verzameling wordt in de buurt van een $S_{1,1}$ -punt op een cusp-variëteit afgebeeld.

Het behandelde dim $M=2$ plaatje mag hier nlt ontbreken:



Voor het beeld $D = f(\Sigma_f)$ van de kritieke verzameling kunnen we dus i.h.a zo iets verwachten:



(Voor een iets kleinere, nog steeds residuale verzameling $G \subset C_g^{\infty}(M, \mathbb{R}^3)$ hebben we nog extra: 1) $f|_{S_{1,1}}$ injectief; 2) $f(S_{1,1}) \cap f(S_{1,0}) = \emptyset$ & 3) contouren snijden transversaal. Voor het bewijs van de stelling zullen we dit nlt nodig hebben).

We veronderstellen nu verder M compact.

$\Sigma_f = S_{1,0}(f) \cup S_{1,1}(f)$ is nu een compacte, gladde 1-dimensionale variëteit, dus een disjuncte vereniging van componenten ℓ_i , die elk diffeomorf zijn met S^1 .

Noteer: $\Gamma_i = f(\ell_i)$, $\Gamma_i^0 = f(\ell_i^0)$ $\ell_i^0 := \ell_i \cap S_{1,0}$

$$\Gamma_i^1 = f(\ell_i^1) \quad \ell_i^1 := \ell_i \cap S_{1,1}$$

$$\Gamma = \cup \Gamma_i; \quad \Gamma^0 = \cup \Gamma_i^0; \quad \Gamma^1 = \cup \Gamma_i^1 \quad \text{etc.}$$

De afbeelding $T^0: \Gamma^0 \longrightarrow \mathbb{RP}^1$

$$x \longmapsto T\Gamma_x^0$$

is glad en heeft een gladdere uitbreiding

$$T: \Gamma \longrightarrow \mathbb{RP}^1$$

Van de normaal vorm in een Γ^1 punt volgt dit onmiddellijk voor een rijtje $x_i \in \Gamma^0 \rightarrow x \in \Gamma^1$ convergeert $T\Gamma_{x_i}^0$ naar een lijn T_x (wanneer de x_i ten minste uit één contour Γ_i^k afkomstig worden.)

Definitie: Voorzie S^1 van de standaard oriëntatie en voorzie $\mathbb{RP}^1 \simeq S^1$ van de door S^1 geïnduceerde oriëntatie door de identificatie afbeelding $S^1 \xrightarrow{z \mapsto} \mathbb{RP}^1$

Voor een $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ met alleen cuspen (en dubbelpunten)

definieren we het windingsgetal w_f als graad van de afbeelding $T \circ f: S^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$

$$x \longmapsto T f(S^1)_x$$

$$(\text{ofwel: } (T \circ f)_* : H_1(S^1, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathbb{RP}^1, \mathbb{Z}))$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{15} & \mathbb{Z} \\ a & \longmapsto & w_f \cdot a \end{array}$$

Het zal duidelijk zijn dat w_f alleen maar afhangt van de verzameling $f(S^1) =: \Gamma$ (en de oriëntatie van Γ)

We noteren $w(\Gamma) = w_f$ waarbij de keuze van een oriëntatie impliciet is.

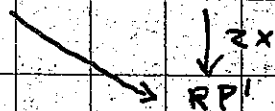
Het volgende feit schijnt al heel lang bekend te zijn (zie [17]):

W

propositie: $w(\Gamma) \equiv \#(\text{cuspen in } \Gamma) \pmod{2}$

bewijs: (Scholts) bijvoorbeeld met inductie naar het aantal cuspen n .

Voor $n=0$ is het duidelijk: de afbeelding $Tof: S' \rightarrow \mathbb{R}P^1$ is te liften naar $Tf: S' \rightarrow S'$



door naar raadhijzen met oriëntatie te kijken.

Stel bewering geldt voor $\# \text{ cuspen} = n$; voeg nu één cusp toe: lokaal ziet dat er uit als



Dus weer $w(\Gamma') \equiv \# \text{ cuspen in } \Gamma' \pmod{2}$ $\square$

We gaan nu voor een $f: M^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^2$ heb speciale oriëntaties $\gamma_i: S' \rightarrow \mathbb{C}$ voor de vorm cirkels $\mathbb{C}$ kiezen.

Laat $x \in S_{1,0}$, $df_x: TM_x \rightarrow \mathbb{R}^2$ bepaalt op natuurlijke wijze een afbeelding $Ddf_x: TM_x \rightarrow \text{Hom}(TM_x, \mathbb{R}^2)$.
 $Ddf_x: TM_x \rightarrow \text{Hom}(\ker df_x, \text{coker } df_x)$, de intrinsieke 2^e afgeleide van Porteous (zie §4.4). Deze induceert weer een afbeelding

$$d_2: \ker df_x \times \ker df_x \rightarrow \text{coker } df_x$$

, een $\text{coker } df_x$ -waardige ^{symmetrische} bilineaire vorm.

Voor een $x \in S_{1,0}$ is $\ker df_x \cap TS_{1,0,x} = 0$ dus is de projectie $\pi: \ker df_x \rightarrow N\mathbb{C}_x$ een isomorfisme (N : normaal ruimte). ($\text{coker } df_x = N\Gamma_{f(x)}^\circ$)

Dit levert een afbeelding

$$d_2: NS_{1,0,x} \times NS_{1,0,x} \rightarrow N\Gamma_{f(x)}^\circ$$

Kies nu een isomorfisme $\mathbb{R} \simeq N\Gamma_{f(x)}^\circ$

We schrijven $NS_{1,0,x} = N_x^+ \oplus N_x^-$ met d_z positief resp. negatief definit op N_x^+ resp N_x^-

Dere toekenning van positief of negatief is echter afhankelijk van het isomorfisme $\mathbb{R} \cong N_x^0(f_x)$

Als echter $\dim M = 2k$, dan is $\dim NS_{1,0,x}$ oneven, dus één van de ruimten N^+ of N^- heeft ook oneven dimensie. Er is dus een natuurlijke splitsing (d.i. onafhankelijk van gekozen isomorfismen)

$NS_{1,0,x} = N_x^0 \oplus N_x^e$ waarbij N^0 en N^e definitie ruimten zijn met oneven respectievelijk even dimensie.

Laat nu $v_x \in N_x^0$ en zij $N_x = d_z(v_x, v_x)$. Kies nu een $T_x \in T_x^0(f_x)$ z.d.d. $\{T_x, N_x\}$ een positief goriende basis vormen. Nu is $d(f|S_{1,0})_x$ $x \in S_{1,0}$

een isomorfisme, dus is er een $\tau_x \in TS_{1,0,x}$ z.d.d. $df_x(\tau_x) = T_x$.

bewering: het vectorveld $\frac{1}{|\tau_x|} \tau_x$ $x \in S_{1,0}$ is uit te

breiden tot een glad vectorveld op heel Σ_f .

bewijs: We hoeven alleen in $S_{1,0}$ -punten te kijken

Daar ziet f er uit als: $f(x, y, x_i) = (x, \frac{1}{2}y^2 - xy + \frac{1}{2}\sum (-1)^{\epsilon_i} x_i^2)$

Dus $df : \begin{pmatrix} 1 & -y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y & -x & \dots & (-1)^{\epsilon_i} x_i \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_f = \{(x, y, x_i) \mid y^2 - x = 0 \text{ \& } x_i = 0\}$

en $T(\Sigma_f)_{(x,y,x_i)} = \{(u, v, v_i) \mid u - 2yv = 0 \text{ \& } v_i = 0\}$

waarbij $N = \{(u, v, v_i) \mid u = 0\} \simeq N$

$d_z f((v, v_i), (w, w_i)) = 2y \cdot v \cdot w + \sum (-1)^{\epsilon_i} v_i w_i$, dus

$d_z f((v, v_i), (v, v_i)) = 2y \cdot v^2 + \sum (-1)^{\epsilon_i} v_i^2$

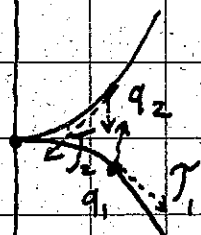
waarbij $N_x^0(f_x) \simeq \mathbb{R} = 0 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ gekozen werd.

12. We kiezen nu 2 punten op Σ_f :

$$p_1(\varepsilon) = (\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}, 0 \dots 0) ; p_2(\varepsilon) = (\varepsilon, -\sqrt{\varepsilon}, 0 \dots 0)$$

en noteer $q_1(\varepsilon) = f(p_1(\varepsilon)) = (\varepsilon, -\frac{2}{3}\varepsilon^{3/2})$

$$q_2(\varepsilon) = f(p_2(\varepsilon)) = (\varepsilon, \frac{2}{3}\varepsilon^{3/2})$$



Zonder verlies van algemeenheid kunnen

we aannemen dat de vector

$(v_1, v_i) = (1, 0 \dots 0) \in N_{p_1}$ in het $n-1$ dimensionale definitieve deel $N_{p_1}^0$ zit.

Dan zit $(v_1, v_i) = (1, 0 \dots 0) \in N_{p_2}$ ^{ook} in het

$n-1$ dimensionale deel, omdat bij omdraaien v het teken van v in d_2 de index met 2 verandert.

Dus $N_{q_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $N_{q_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ aanvullen tot positieve basis met raak vectoren levert $T_{q_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix}$, $T_{q_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix}$

Erstverre vectoren die hier op terecht komen en raken aan

Σ_f : $T_{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \end{pmatrix}$, $T_{p_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \end{pmatrix}$. We zien dat voor $\varepsilon \rightarrow 0$

$\frac{1}{|T_{p_i}|} T_{p_i} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dus vector veld is continu (en

zelfs glad) uit te breiden over heel Σ_f $\square$

Werkwijzen Laat nu $\gamma_i: S' \rightarrow \mathbb{C}_i$ de unieke parametrisering z.d.d. $(d\gamma_i)_0(\frac{\partial}{\partial \theta}) = t$, het hierboven gecostrueerde eenheidsvectorveld over Σ_f . Noteer $w(\Gamma_i)$ het winding getal van Γ_i met de aldus geïnduceerde oriëntaties in (dus $w(\Gamma_i) :=$ graad v. afbeelding $S' \xrightarrow{\text{Totot}} \mathbb{RP}^1$)

Dan hebben we de volgende stelling:

Stelling. Laat M compact, $\dim M = 2k$

Laat $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$ & $f \in \mathcal{F}$

Dan:

$$\chi(M) = \sum_i w(\Gamma_i)$$

waarbij de som over alle componenten Γ_i van Σ_f en de windingsgetallen op boven vermelde wijze worden genomen.

bewijs: Het bewijs verloopt in een aantal stappen. De eerste stap bestaat uit het vinden van een 'goede projectie richting'.

lemma: Laat $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$. Elke lijn door 0 in $\mathbb{R}^{k+1}$, d.i. een element van $\mathbb{R}P^k$ bepaalt een projectie π_a op het ortho complement van a .

Dan: $\text{rank}[d(\pi_a \circ f)_x] = \text{rank}(df_x)$ als $a \notin \text{Im } df_x$
 $\text{rank}[d(\pi_a \circ f)_x] = \text{rank}(df_x) - 1$ als $a \in \text{Im } df_x$

bewijs: triviaal $\square$

Voor een $f \in \mathcal{F}$; $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$ hebben we dus:

$$x \in S_0(f) \Rightarrow \text{rank } d(\pi_a f)_x = 1$$

Er zijn eindig veel $S_{1,1}$ -punten, waar $\text{rank}(df_x) = 1$

Wanneer we de eindig vele richtingen $\text{Im } df_x$ $x \in S_{1,1}$ vermijden, dan houden we nog een open dicht deel $\subset \mathbb{R}P^1$ van richtingen over z.d.d. $z \in S_{1,1}(f) \Rightarrow \text{rank } d(\pi_z f)_x = 1$

Voor dergelijke richtingen a liggen de kritieke punten van de functie $\pi_a \circ f: M \rightarrow a^\perp = \mathbb{R}$ dus op $S_{1,0}(f)$.

We gaan nu richtingen a zoeken z.d.d. $\pi_a \circ f|_M^0$ Morse is.

14. Lemma: Laat $\dim M = k$ en $i: M \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ een immersie.
 Laat π_A de projectie van $\mathbb{R}^{k+1}$ op het orthogonaal complement van een
 k -vlak $A \in G_k(\mathbb{R}^{k+1})$.

Dan: 1) x kritiek punt van $\pi_A \circ i: M \rightarrow A^\perp \simeq \mathbb{R} \Leftrightarrow$
 $A = \ker \text{Im}(di_x)$

2) x niet Morse punt v. $\pi_A \circ i: M \rightarrow A^\perp$, $A = TM_x \Leftrightarrow$
 $\ker \text{Im}(di_x)$ is kritieke waarde van de afbeelding
 $Ti: M \rightarrow G_k(\mathbb{R}^{k+1})$; $x \mapsto \text{Im}(di_x)$

bewijs: 1) is triviaal

2) $\pi_A \circ i: M \rightarrow A^\perp$ levert een sectie

$d(\pi_A \circ i): M \rightarrow \text{Hom}(TM, A^\perp)$. In een kritiek punt x
 hebben we dan een afbeelding

$$\begin{aligned} D \underline{d(\pi_A \circ i)}_x: TM_x &\rightarrow \text{Hom}(TM_x, A^\perp) \\ v &\mapsto h_v: TM_x \rightarrow A^\perp \\ w &\mapsto \pi_A[D \underline{di}(v)_x](w) \end{aligned}$$

(zie ook § en §).

$Ti: M \rightarrow G_k(\mathbb{R}^{k+1})$ levert een afbeelding

$dTi: TM \rightarrow TG_k(\mathbb{R}^{k+1})$. De ruimte aan de
 Grassmannen door het punt $Ti(x)$ is kanoniek isomorf met
 $\text{Hom}(\text{Im } df_x, \text{Im } df_x^\perp)$. Met dit isomorfisme krijgen we:

$$\begin{aligned} \text{we: } dTi_x: TM_x &\rightarrow \text{Hom}(\text{Im } df_x, \text{Im } df_x^\perp) \\ v &\mapsto \lambda_v: \text{Im } df_x \rightarrow \text{Im } df_x^\perp \\ w &\mapsto \pi_{\text{Im } df_x} D \underline{di}(v)_x (w) \end{aligned}$$

Dus: x niet Morse $\Leftrightarrow v \mapsto h_v$ niet iso $\Leftrightarrow v \mapsto \lambda_v$ niet
 iso $\Leftrightarrow dTi_x: TM_x \rightarrow \text{Hom}(\text{Im } df_x, \text{Im } df_x^\perp)$ niet maximale
 rang $\Leftrightarrow \text{Im } df_x$ is kritieke waarde $\square$

19

Dit lemma toepassend op $i: \Gamma^0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ en gebruikmakend van de stelling van Morse-Sard vinden we: Er is een verzameling $\mathcal{O} \subset \mathbb{RP}^1$ van volle maat z.d.d. $a \in \mathcal{O} \Rightarrow \pi_a|_{\Gamma^0}$ is een Morse-functie & $\text{rank}(df_x) = 1$ voor $x \in S_{1,1}(f)$.

De samengestelde afbeelding $M \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\pi_a} a^\perp$ is nu ook een Morse-functie.

Laat $p \in S_{1,0}$ z.d.d. $f(p)$ een Morse punt is voor $\pi_a|_{\Gamma^0}$.

In geschikte parametrisering $i: (-1,1) \rightarrow \Gamma^0$; $0 \mapsto f(p)$ kan na rotatie en translatie in $\mathbb{R}^2$ bereikt worden dat:

$\pi_a = \pi: (z_1, z_2) \rightarrow z_2$ & $\pi i(t) = (-1)^d t^2$ zodat Γ^0 in de buurt van $f(p)$ beschreven wordt door $\{(g(t), (-1)^d t^2)\} \subset \mathbb{R}^2$ met $g'(t)|_{t=0} \neq 0$.

Er zijn coördinaten z.d.d. f er uit ziet als

$$f(x, \{x_i\}) = (x, \sum (-1)^{\varepsilon_i} x_i^2) \quad \{x_i\} = x_1, \dots, x_{2k-1}$$

Na de ~~coördinaten~~ coördinaten transformatie

$$(a, b) \mapsto (g(a), (-1)^d a^2 + b) \quad \text{waarna}$$

$$f(x, \{x_i\}) = (g(x), (-1)^d x^2 + \sum (-1)^{\varepsilon_i} x_i^2) \quad \text{en dus}$$

$$\pi f(x, \{x_i\}) = (-1)^d x^2 + \sum (-1)^{\varepsilon_i} x_i^2, \quad \text{ofwel } p \text{ is een Morse punt voor } \pi \circ f.$$

De volgende stap is het berekenen van de windingsgetallen. Voor een component $\ell_i \in \Sigma_f$ kunnen we de graad van de afbeelding

$$S^1 \xrightarrow{\gamma_i} \ell_i \xrightarrow{f} \Gamma_i \xrightarrow{T} \mathbb{RP}^1 \simeq S^1$$

$\searrow \Lambda_i \nearrow$

berekenen door te tellen hoeveel een bepaalde reguliere waarde $a \in \mathbb{RP}^1$ aangenomen wordt, geteld

16. met geschikt teken:

$$\deg \Lambda_i = \sum_{x \in \Lambda_i^{-1}(\alpha)} \text{OR}(x)$$

met $\text{OR}(x) = 1$ als oriëntatie behouden blijft
 $= -1$ als oriëntatie omkeert.

We kiezen als reguliere waarde natuurlijk een gekozen projectie richting $\alpha \in \mathcal{O}$

Laat nu de coördinaten rond een morse punt $p \in \mathcal{L}_i$ als boven gekozen zijn.

De standaard eenheidsvector $e \in TS'_0$ wordt afgebeeld op eenheidsvector $t \in T\mathcal{L}_{i,0}^\circ$, die onder f terecht komt op een reële vector $T \in T\Pi_{i,0}^\circ$, hetgeen dus een reëel veelvoud van de vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Men ziet nu eenvoudig in dat $\text{OR} = \text{sign}(\langle (-1)^d \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T \rangle)$

Schrijf nu: $f(x, \{x_j\}) = (g(x), (-1)^d x^2 + \sum_{i \in I} (-1)^r x_i^2 + \sum_{j \in J} (-1)^{r+1} x_j^2)$
met $r = \#$ als er een oneven aantal mintekens voor de $\{x_j\}$ verschijnt, $r=0$ als een aantal mintekens, of nee een oneven aantal plus tekens. (Gevolg is: $\#I \equiv 1 \pmod{2}$)

We splitsen $N\mathcal{L}_{i,0}^\circ$ in $N^o \oplus N^e$. In deze coördinaten:

$$N^o = \{(u, \{v_j\}) \mid u=0 \ \& \ v_j=0 \text{ voor } j \in J\}$$

Voor $d \in N^o$ volgt nu $d_2(d, d) = (-1)^r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, positief getal.

Volgens de definitie van de oriëntatie voor de $\mathcal{L}_i$ moeten T en deze vector $(-1)^r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ een positief georiënteerde basis vormen. Er volgt: $\text{OR} = (-1)^{d+r}$

Tenslotte berekenen we de index van het kritieke punt 0

Lemma: $\text{Ind} \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{\varepsilon_i} x_i^2 \right) \equiv \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \pmod{2}$.

17

bewijs: Inductie naar n . Voor $n=1$ duidelijk;

$$\text{Ind} (-1)^{2n+1} x^2 = 1 \equiv 2n+1 \pmod{2}; \text{Ind} (-1)^{2n} x^2 = 0 \equiv 2n \pmod{2}.$$

$$\& \text{Ind} ((-1)^{\varepsilon_{n+1}} x_{n+1}^2 + Q_n) = \text{Ind} (-1)^{\varepsilon_{n+1}} x_{n+1}^2 + \text{Ind} Q_n \pmod{2}$$

dus klaar

□

$$\text{Dus: } \text{Ind} \pi_f(x) = \text{Ind} \left((-1)^d x^2 + (-1)^r \sum_{i \in I} x_i^2 + (-1)^{r+1} \sum_{j \in J} x_j^2 \right)$$

$$\equiv d + r \cdot \#I + (r+1) \cdot \#J \pmod{2} \equiv d+r \pmod{2}$$

omdat $\#I \equiv 1 \pmod{2}$ en dus $\#J \equiv 0 \pmod{2}$

We hebben dus voor een kritiek punt x : $OR = (-1)^{\text{Ind} \pi_{af}(x)}$

Sammenen over alle kritieke punten op ℓ_i :

$$w(\ell_i) = \sum_{x \in \Sigma \pi_{af} \cap \ell_i} OR = \sum_{x \in \Sigma \pi_{af} \cap \ell_i} (-1)^{\text{Ind} \pi_{af}(x)}$$

Sammenen over alle componenten ℓ_i :

$$\sum w(\ell_i) = \sum_{x \in \Sigma \pi_{af}} (-1)^{\text{Ind} \pi_{af}(x)} = \chi(M) \text{ wegens}$$

de Morse-gelijkheid. Hiermee is de stelling bewezen. □

opmerking: Wanneer we mod 2 rekenen, dan gaat het bewijs ook in oneven dimensie door (maar zegt dan minder). Dus: M compact, $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f \in F$

dan A. $\chi(M) = \sum w(\ell_i) \pmod{2}$

B. $\dim M = 2k$, $k=1,2,\dots$

$$\chi(M) = \sum w(\ell_i)$$

Direct gevolg:

$$\chi(M) \equiv \# S_{1,1} \pmod{2} \quad (\text{Vergelijk dit met } f: M \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dan } \chi(M) \equiv \# \Sigma_f \pmod{2})$$

Het boven staande gevolg is een resultaat van Thom [17] uit 1956.

De complete stelling gaat terug op Levine [12], 1961.

In geval $\dim M = 2k+1$ hebben we dus: $\# S_{1,1} \equiv 0 \pmod{2}$, d.i.: er is een even aantal cusps. We kunnen dit nog iets verscherpen:

propositie: Laat M compact, $\dim M = 2k+1$,
 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{F}$.

Dan: Voor elke component ℓ_i van Σ_f geldt
 $\# S_{1,1} \cap \ell_i \equiv 0 \pmod{2}$.

bewijs: Voor een punt $x \in \ell_i^\circ$ hebben we de coördinaatwaardige bilineariteit van $dz: N\ell_i^\circ \times N\ell_i^\circ \rightarrow \text{coord}_x$. Kies een isomorfisme $j_x: \text{coord}_x \rightarrow \mathbb{R}$ en zij $A(x) = \min [\text{Ind}(j_x \circ dz_x), \text{Ind}(-j_x \circ dz_x)]$, de absolute transversale index. (is onafh. van keuze van j_x)

Als $\dim M = 2k+1$, dan $\dim N\ell_i = 2k$ dan verandert de absolute index met 1, wanneer er een $S_{1,1}$ punt gepasseerd wordt. Na een complete omloop komt men op dezelfde waarde aangekomen worden, dus $\# S_{1,1} \cap \ell_i \equiv 0 \pmod{2}$.

Als $\dim M = 2k$ gaat dit natuurlijk niet op; de index heeft niet te veranderen bij het passeren van een

S_{k-1} -punt: $\min(k-1, k) = \min(k, k-1)$. Wel kan men
nog zeggen: $\dim M = 2k$ & $\chi(M) \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow$ er zijn punten
 $x \in S_{1,0}$ met $A(x) = k-1$.

————— 0 —————

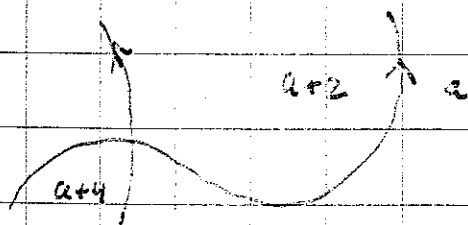
2.2 Voorbeelden.

We bekijken het geval $\dim M = 2$, M compact.

$f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$ & $f \in \mathcal{G}$ (d.w.z. $f \in \mathcal{F}$ en normale
kruisingsconditie.)

Een contour Γ van zo'n $f \in \mathcal{G}$ verdeelt het vlak dan
(locaal) in twee delen. Het aantal inverse beelden
van f (= het aantal 'bladen') verandert steeds met twee
wanneer een contour gepasseerd wordt. De boven besproken
orientatie betekent precies dat we zo langs Γ moeten
lopen dat we het gebied met het grootste aantal bladen
'links' moeten laten liggen.

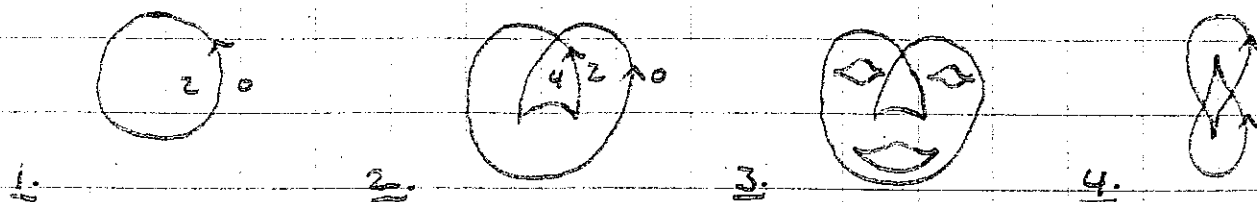
Dus bijv.



We zullen met kleine getalletjes in figuren het
aantal bladen aangeven.

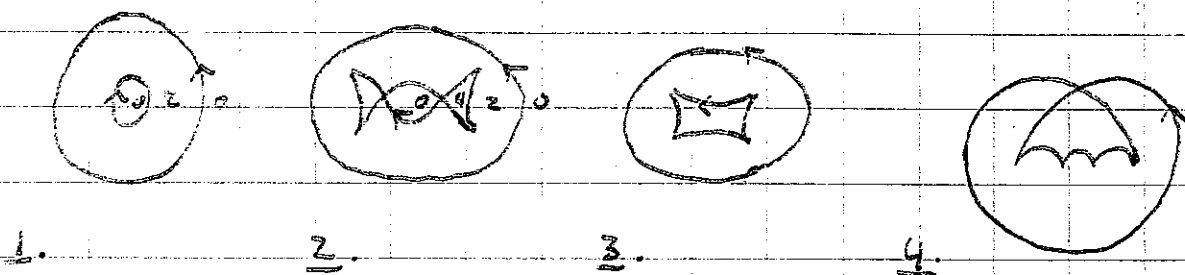
Hieronder volgt een aantal contour patronen van
van 2-dimensionale compacte variëteiten M onder een
 $f \in \mathcal{G}: M \rightarrow \mathbb{R}^2$. In de meeste gevallen is het duidelijk
welke f gesuggereerd wordt.

20. A. $M = S^2$; $\chi(M) = 2$.



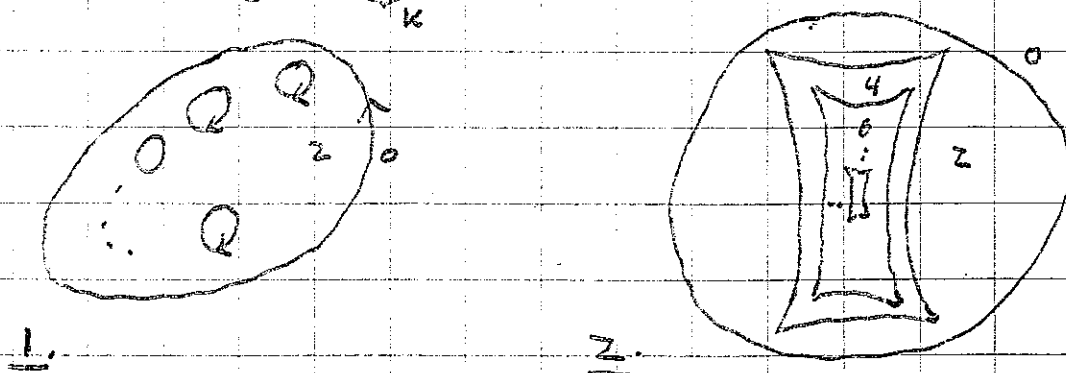
opmerking: Men kan een een gegeven vectorpatroon steeds zoveel patroontjes $\hookrightarrow$ toevoegen als men wil.

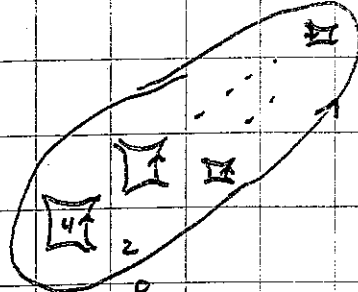
B. $M = S^1 \times S^1 = T$; $\chi(M) = 0$.



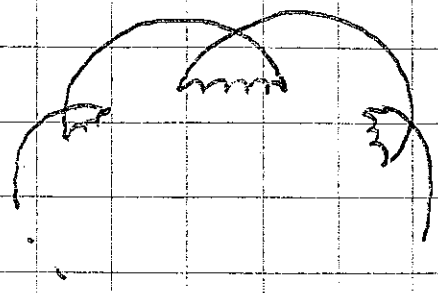
opmerking: Men kan een een gegeven vectorpatroon ~~steeds~~ ~~aanpak~~ van $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$ het elementje $\hookrightarrow$ toevoegen om zo een vectorpatroon van een $\tilde{f}: M \# T \rightarrow \mathbb{R}^2$ te krijgen.

C. $M_k = T \# T \# \dots \# T$; $\chi(M_k) = 2 - 2k$; $g(M_k) = k$.



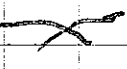
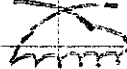


3.

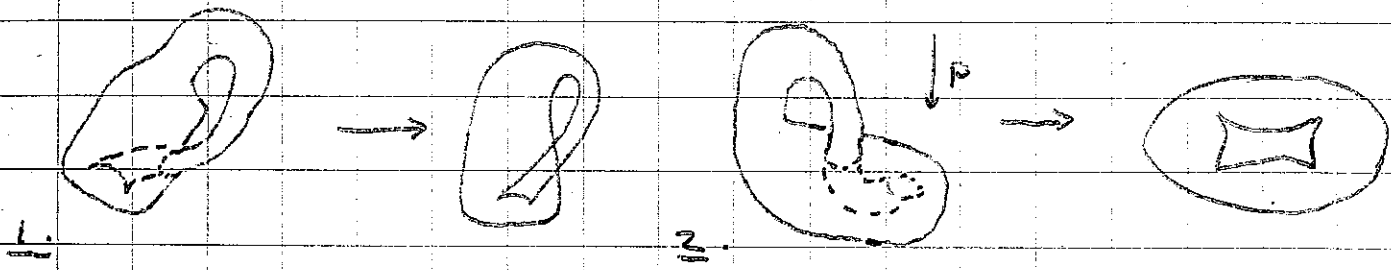


4.

$$g = \frac{\# S_{1,1}}{2} - \# \delta$$

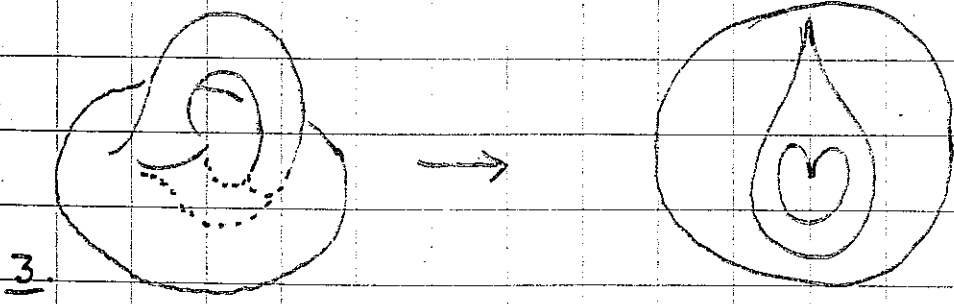
Opmerking (bij 4.): De figuur bestaat uit één contour.
 Het aantal zelfdoor-snydingen is $\# \delta$. Bij elke zelfdoor-
 snyding  wordt  aangezet, met de
 een aantal cusps.

D. $M = K$, de kleinse fies; $\chi(M) = 0$.

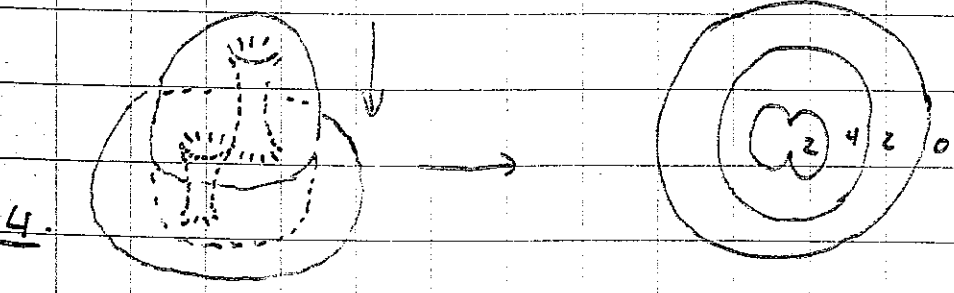


1.

2.

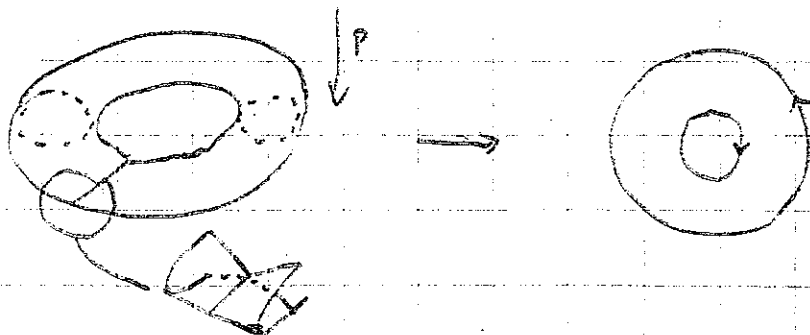


3.

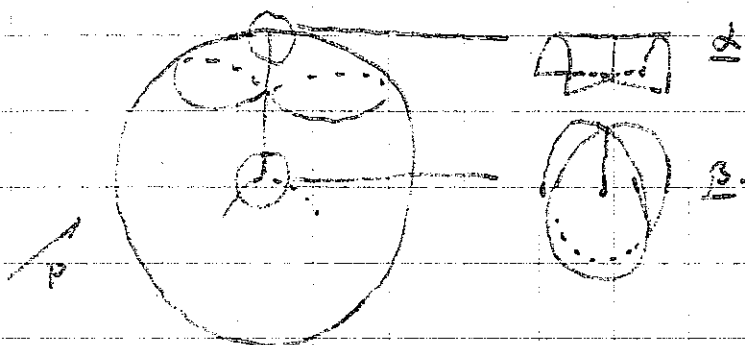


4.

22. 5.

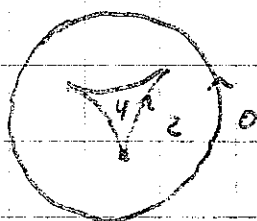


E. $M = \mathbb{R}P^2$; $\chi(M) = 1$.



Wanneer dit geheel geprojecteerd wordt, wordt de crosscap α op een klein deksel afgeprojecteerd (als bij D.5.). β wordt afgebeeld als $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$
 $z \mapsto z^2$

Deze afbeelding is niet stabiel. We kunnen de afbeelding in de buurt van β storen tot $z \mapsto z^2 + \epsilon \bar{z}$. Dit levert het volgende contour patroon:



Men gaat dan verandering na dat in al deze voorbeelden inderdaad steeds $\chi(M) = \sum w(\tilde{v}_i)$ geldt.

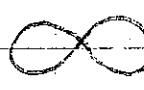
— 0 —

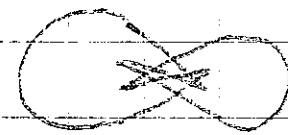
De gesuggereerde contour patronen roepen een aantal interessante vragen op:

*: In welke mate wordt een oppervlakte gekarakteriseerd door zijn verzameling van mogelijke contour patronen. Aangenomen de sfeer het enige oppervlak is met $X=2$ komen we daar er zo uit. Voor oppervlakken met $X=0 \bmod 2$ & $X \leq 0$ ligt het moeilijker. Zo kan een niet oriënteerbare oppervlakte steeds dezelfde contouren vormen als het corresponderende georiënteerde oppervlak met dezelfde ander karakteristiek, vgl. de 'torus' verandering van de kleinse fles D.5. Aan de andere kant lijkt het me onmogelijk dat de torus het patroon D3 of D4 kan vormen; begrijp ik het niet.

*: Naast hierbij aan sluit de vraag of er iets als Morse ongelijkheden bestaan van de vorm waarbij betrekkingen afgeschat kunnen worden met bijvoorbeeld aantallen ~~windingsgetallen~~ contouren met een gegeven windingsgetal? Komt hierbij de zelfintersecties van de contouren in het spel? Patroon C4. geeft zo'n hint. Heel triviaal is natuurlijk de opmerking $\beta_0(M) \leq \# \text{contouren}$, voor M compact, omdat elke component minstens één contour op ∂M heeft.

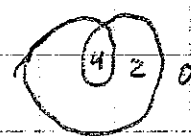
*: Zeer intrigerend is het probleem welke contour patronen er precies kunnen optreden. Een eerste

24. noodzakelijke conditie is dat het patroon 'kleurbaar' is. Met kleurbaar bedoel ik dat in het patroon op consistente wijze te voorzien is van nummer-tjes. Dus bij het passeren van een contour moet de verschild zijn en bij een intersectie $\times$ moet de kleuring $\begin{matrix} a & \\ a+2 & \times & a+2 \\ & a+4 & \end{matrix}$ zijn. Zo is de contour  niet kleurbaar, en treedt dus niet op als contour contour van een $f \in \mathcal{C}_g$. (Toch kan men dit patroon interpreteren als een patroon van een instabiele $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die te sterven is naar:

naar:  die niet kleurbaar is.

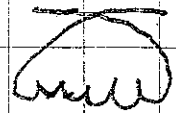
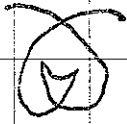
kan dit altijd? (de reden van niet...)

Kleurbaarheid is een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor de uitbreidbaarheid van $f: U \subset \mathbb{C}_i \rightarrow \Gamma_i$ tot een $\tilde{f}: U \tilde{\mathbb{C}}_i \rightarrow \tilde{\Gamma}_i$ met $\tilde{f}|_{U \mathbb{C}_i} = f$, met $\mathbb{C}_i$ cirkels en $\tilde{\mathbb{C}}_i \rightarrow \mathbb{C}_i$ $(-1,1)$ -bundels over $\mathbb{C}_i$ (dus $\tilde{\mathbb{C}}_i = (-1,1) \times \mathbb{C}_i$ of Möbius band) en $\tilde{\Gamma}_i$ een omgeving van $\Gamma_i \subset \mathbb{R}^2$.

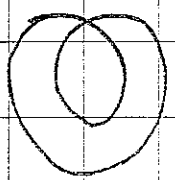
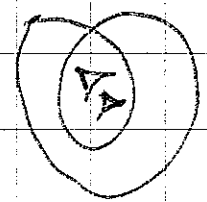
Kleurbaarheid van een patroon is echter verre van voldoende voorwaarde voor het zijn van een contour-patroon:  is kleurbaar, maar geen contour van

een M onder $f \in \mathcal{C}_g: M \rightarrow \mathbb{R}^2$, want dan 1) $\beta_0(M) = 1$ & 2) $\chi(M) = 4$ en 1) & 2) tegelijk is niet mogelijk.

De obstructies lijken echter van een lokaal karakter. Toepassing van de stelling uit §2.3 geeft dat de γ al voort mag voortkomen, en als

of  ,   en zo voort.

Het is triviaal dat elke kleurbaar patroon door toevoeging van extra contouren tot een contourpatroon van een $f \in \mathcal{C}_g: M \rightarrow \mathbb{R}^2$ voor een reële M gemaakt kan worden.

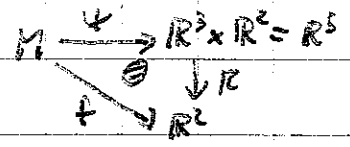
Zo is  uit te breiden tot  die

voorkomt als $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

* Een andere interessante kwestie is de 'liftbaarheid'. Veel contourpatronen, zoals A1 t.m.3, B1 t.m.4 & C1 t.m.4 zijn op te vatten als zijnde afkomstig van de standaard projectie $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ voortgegaan door een inbedding $i: M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Dit brengt ons tot het begrip inbeddingsgetal van een contourpatroon D .

Definitie: $i(M, D) = \min \{ k \mid \exists i: M \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ z.d.d. } p \circ i(\sum \text{roei}) = D \}$ waarbij $p: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^2$ de standaard projectie.

Voor een oriënteerbaar oppervlak is er altijd een inbedding

$j: M \rightarrow \mathbb{R}^3$. Als $f(\sum f) = D$; $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$ dan geldt 

met $\psi(x) = (j(x), f(x))$ een inbedding.

Dus: M oriënteerbaar $\Rightarrow 3 \leq i(M, D) \leq 5$

idem: M niet oriënteerbaar $\Rightarrow 4 \leq i(M, D) \leq 6$

Voorbeeld: voor A4 hebben we $i(M, D) = 4$.

Vraag: bestaan er contouren met $i(M, D) = 5$ of 6?

26. * Interessant is ook het probleem van de klassificatie van $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$ onder homotopieën die transversaal staan op de Thom-Bordman strate (§3)

Lemma [11] heeft de volgende 'usp-cancellation' stelling bewezen:

Laat dim $M > 2$, $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f \in F$.

Dan: $\chi(M) \equiv 0 \pmod{2} \Leftrightarrow \exists g: M \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f \sim g$ met $\# S_{1,1}(g) = 0$

$\chi(M) \equiv 1 \pmod{2} \Leftrightarrow \exists g: M \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f \sim g$ met $\# S_{1,1}(g) = 1$.

Class [3] heeft de volgende mod 2 resultaten:

Laat M orienteerbaar, $\chi(M) \equiv 0 \pmod{2}$, dim $M = m$ en

$f \in \mathcal{F}_g: M \rightarrow \mathbb{R}^2$ z.d.d. $\# S_{1,1}(f) = 0$ (waar $f|_{\Sigma_f}$ immersie)

kies een trivialisering van $N\mathbb{R}^2$ en schrijf $N(\Sigma_f) = L^+ \oplus L^-$ met L^+ pos. def. riimte t.v. $d_c: N\Sigma_f \times N\Sigma_f \rightarrow N\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}$

Laat $\tau(f) = \langle w_1(L^+), [\Sigma] \rangle$ met $w_1(L^+)$ de 1e Stiefel-Whitney klasse van L^+ en $[\Sigma] \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ de fundamentele homologie klasse van Σ_f (zie ook §4.4 en §4.5)

(Voor dim $M = 2$ is $\tau(f) \pmod{2}$ het aantal componenten Σ_i waarvoor $N\Sigma_i$ niet-triviaal is.)

Laat $\sigma(f) =$ aantal componenten van $\Sigma_f \pmod{2}$

en $\delta(f) =$ aantal kruisingen in $f(\Sigma_f) \pmod{2}$.

Dan:

$$\begin{cases} m \equiv 0 \pmod{4} : & \tau(f) + \delta(f) = \sigma(M) \pmod{2} \\ m \equiv 2, 3 \pmod{4} : & \tau(f) + \delta(f) = 0 \pmod{2} \\ m \equiv 1 \pmod{4} : & \tau(f) + \sigma(f) = k(M, \mathbb{Q}) \pmod{2}. \end{cases}$$

Hierin is $S(M)$ de halve signatuur van M en $k[M, \mathbb{Q}]$ de $\mathbb{Q}$ -semi carakteristiek $\sum_{i=1}^k \text{rank } H_i(M, \mathbb{Q})$ met $\dim M = 2k+1$.

Het is interessant om te kijken in hoeverre deze mod 2 resultaten integraal te maken zijn.

2.3 Toepassing van $\chi(M) = \sum w(\tau_i)$

We bekijken nu afbeeldingen van een 2-dimensionale variëteit M met rand ∂M , diffeomorf met S^1 naar de schijf D^2 met rand S^1 , $f: (M, \partial M) \rightarrow (D^2, S^1)$

We beschouwen de collectie $\mathcal{F} \subset C_0^0(M, \partial M, D^2, S^1)$

waarvoor geldt: 1). $f: M \rightarrow D^2 \Rightarrow f \in \mathcal{F}$

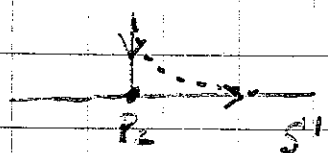
2) $\partial f: \partial M \rightarrow S^1$ 'monoc' (door $\pi_1 S^1$)

Men gaat er eenvoudig na dat deze 2 soorten contouren zijn a) contouren die de rand vervolgen; b) 'interne' contouren waarvoor geldt: $\Gamma_n \cap S^1 = \{p_1, p_2\}$ & $T_{p_1} \Gamma_n \cap T_{p_1} S^1 = 0$

Interne contouren hebben een windings getal, zoals boven gedefinieerd.

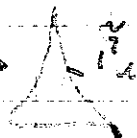
Definitie: Het windings getal van een interne contour Γ_n definiëren we als het globale windings getal van de gesloten kromme $\tilde{\Gamma}_n^k$ die als volgt uit Γ_n ontstaat:

Loop over Γ_n met orientatie mee, te beginnen bij het rand punt $p_1 \in \Gamma_n \cap S^1$. Bij het andere punt $p_2 \in \Gamma_n \cap S^1$ aangekomen is de situatie lokaal als:



Loop nu langs S^1 mee tot in de buurt

28.

van P_i nauw oer meer volgendes ---
lopen. $\vec{v}_i$ dus $W(P_i) = 0$.

Dit alles opschrijven is een kluiswerkje. Misschien is er
een eenvoudiger definitie.

Laat nu $\Pi = \#$ uitwendige contouren
 $= \frac{1}{2} \# \sum \partial f$
 $=: \text{'het phoigetal' van } f$.

Noter $c_i = \# S_{i,1} \cap (U P_i) =$ aantal inwendige cusps
 $c_n = \# S_{i,n} \cap (U P_n) =$ aantal uitwendige cusps
 $W_i = \sum W(P_i) ; W_n = \sum W(P_n)$

Den hebben nu de volgende propositie:

Propositie: a. $\chi(M) = \deg(\partial f) + W_i + W_n$
b. $W_i = c_i \pmod{2}$
c. $W_n = c_n + \Pi \pmod{2}$.

bewijs: a. Laat eerst f z.d.d. en geen uitwendige
contouren zijn. Het idee is nu om f uit te breiden
tot een $\tilde{f}: 2M \rightarrow \mathbb{R}^2$, met $2M$ de 'verdubbelde' van M
(zie [9]). Hoewel het niet echt verevenlijkt is, moeten we op
de gladheid van $\tilde{f}$ letten.

Lemma: (C^∞ -dubbel van M) M compact met rand ∂M

Laat $h: \partial M \times [0,1) \rightarrow M$ een collar en

$2h: \partial M \times (-1,1) \rightarrow 2M$ de overeenkomstige tubulaire

omgeving van ∂M in $2M$, $T = \text{Im}(zh) \subset 2M$. 29

Dan is er een C^∞ afbeelding $\underline{V}: 2M \rightarrow M$ die buiten T overeenkomt met de voorafbeelding $V: 2M \rightarrow M$
 $(x, i) \mapsto x \quad i=1,2$.

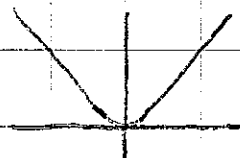
bewijs: ~~Kies een $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $\phi(x) = |x|$ voor $x \in \mathbb{R}$.~~

Laat $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een C^∞ functie met de volgende

eigenschappen: 1) $|x| > \frac{3}{4} \quad f(x) = |x|$

2) $|x| < \frac{1}{4} \quad f(x) = x^2$

3) $|\frac{df}{dx}| > 0$ voor $x \neq 0$.



Definieer nu: $\underline{V}: 2M \rightarrow M$ als volgt:

$x \in 2M \setminus T : \underline{V}(x) = V(x)$

$x \in T : \underline{V}(x) = h(\exists dx z(zh^{-1}(x)))$

Dere voldoet aan de eisen. $\square$

Voor onze $f: M, \partial M \rightarrow D^2, S^1$ de kiezen we nu een collar h die Σ_f vermijdt en definiëren $\tilde{f}: 2M \rightarrow \mathbb{R}^2$ door $f \circ \underline{V}: 2M \rightarrow M \rightarrow \mathbb{R}^2$. We hebben:

$\Sigma_{\tilde{f}} = \Sigma_f \times 1 \cup \Sigma_f \times 2 \cup \partial M$, waarbij uit de keuze van h als boven volgt dat ∂M uit $S_{1,0}$ -punten bestaat, die $\deg(\partial f)$ maal over ∂D^2 heen ligt.

Uit stelling volgt nu: $\chi(2M) = 2W_i + 2 \cdot \deg(\partial f)$

Met $\chi(2M) = 2\chi(M)$ komt er $\chi(M) = W_i + \deg(\partial f)$

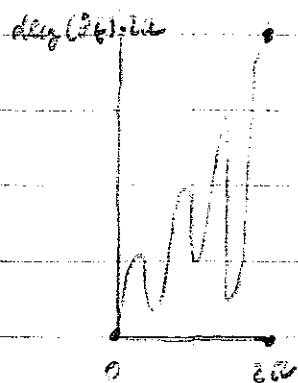
Laat nu f wel voldoende goede constructies hebben

Kies een homotopie van $\partial f: \partial M \rightarrow S^1$ 'die de plooi glad strijkt'. N.l. $\partial M \simeq S^1$

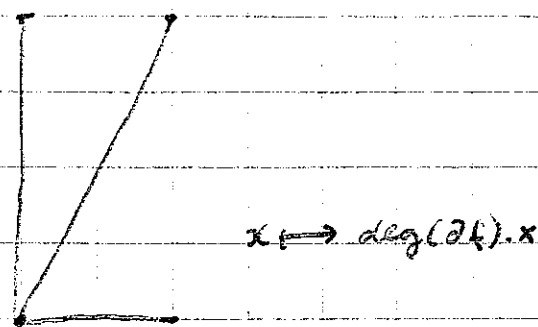
36

We kunnen $\partial f: S^1 \rightarrow S^1$ beschrijven door een afbeelding

$$\partial f: [0, 2\pi] \longrightarrow [0, \deg(\partial f) \cdot 2\pi]$$

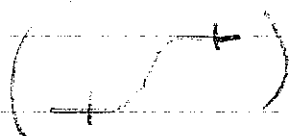


De homotopie moet
dit netjes overbrengen
in



bv: Laat $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ z.d.d. 1) $\sigma(x) = 0$ $x < \frac{1}{4}$

2) $\sigma(x) = 1$ $x > \frac{3}{4}$ & 3) $\sigma(x)$ monoton. ↑ en C^∞ .



Laat nu $h_t: S^1 \times I \rightarrow S^1$

$$(\theta, t) \longmapsto ((1-\sigma(t)) \partial f + \sigma(t) \cdot \deg(\partial f) \cdot \theta)$$

Beschouw nu $f: M \cup_{\partial M} I \times S^1 \rightarrow D^2$ door:

$$x \in M \longmapsto \frac{1}{2} f(x)$$

$$x \in I \times S^1$$

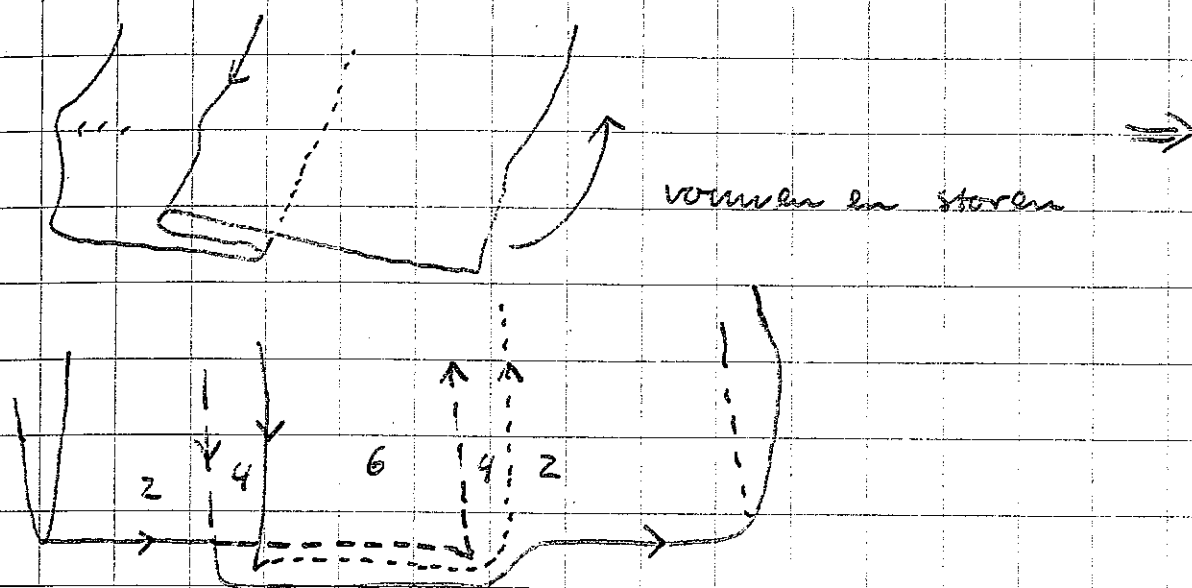
$$x = (\theta, t) \longmapsto (p, q) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} t, h_t(\theta) \right)$$

(dare f is glad.)

Door deze procedure worden uitwendige contouren Γ_n van f met windingsgetal $w(\Gamma_n)$ overgezet in inwendige contouren van f met per definitie het zelfde windingsgetal.

Conclusie a van de Propositie volgt nu uit het vorige §. is. Corollarium..., f idem, met de opmerking dat voor een uitwendige contour geldt: $w(\Gamma_n) = C_n + 1 \pmod{2}$, ontleend bij de definitie van $w(\Gamma_n)$ een kunstmatige cusp werd geïntroduceerd. $\square$

Het is aardig om $\underline{d}$ in te zien zonder ∂f via de homotopie glad te trekken, b.v. door 'direct om te vormen':



Wanneer we langs de contour lopen, dan behouden we door uitwendige contour een extra winding $2W(I_n)$.

Corollarium: $f: (M, \partial M) \rightarrow (D^2, S^1)$; $f \in \mathcal{F}$

Dan: $\# \mathcal{S}_{1,1}(f) = \chi(M) + \deg(\partial f) + \pi \pmod{2}$.

N.b.: met W_i en W_n uit β & γ in $\underline{d}$ in; $\# \mathcal{S}_{1,1}(f) = C_i + C_n =: c = \text{totaal aantal cuspen}$.

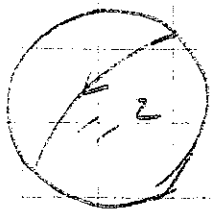
Ten slotte enkele voorbeelden:

Eerst het geval $M = D^2$.

$\chi(M) = 1$; $d = \deg(\partial f)$

dus $\# \mathcal{S}_{1,1} = 1 + d + \pi \pmod{2}$.

32.

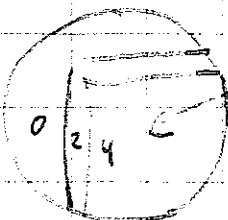
A.

$$d=0; R=1$$

$$w_i=2; C_i=0$$

$$w_u=1; C_u=0$$

$$d+R+1=0$$

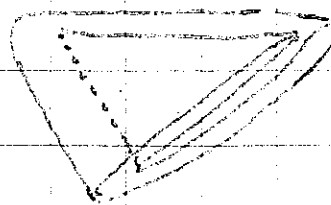
B.

$$d=0; R=2$$

$$w_i=0; C_i=0$$

$$w_u=1; C_u=1$$

$$d+R+1=C=1$$



de 'zak dekk'.

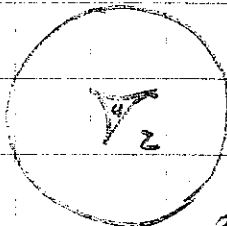
C.

$$d=1; R=1$$

$$w_i=1; C_i=0$$

$$w_u=0; C_u=1$$

$$d+R+1=1$$

D.

$$d=2; R=0$$

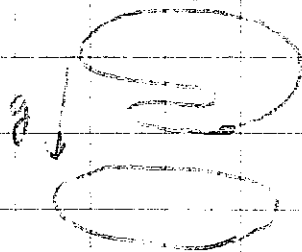
$$w_i=-1; C_i=3$$

$$w_u=C_u=0$$

$$d+R+1=3=1$$

$$(z \mapsto z^2 + \epsilon \bar{z})$$

In het blok is ook de volgende toepassing: Laat $\gamma: S^1 \rightarrow S^1$ als gegeven door de volgende afbeelding: . Dan $d=R=1$



Dus voor elke $f: (M, \partial M)$ die γ voortzet geldt:

$\Sigma_{1,1} \equiv K(M)$ mod 2. I.w.b. is er voor een schijf

al zijn de een cusp, het geen ielkele natuur lijn van

ziet worden. Het corollarium legt een verband

tussen Engel- en schijf van ∂f en f . Als zodanig

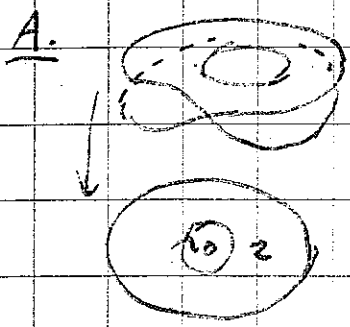
kan het dit opvatten als een 'stelling van Stokes'

van integrabiliteit. Men kan ook afvragen

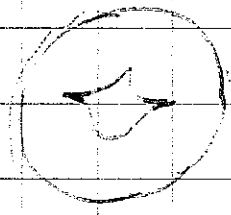
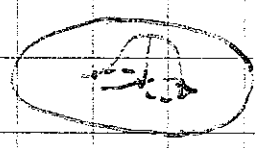
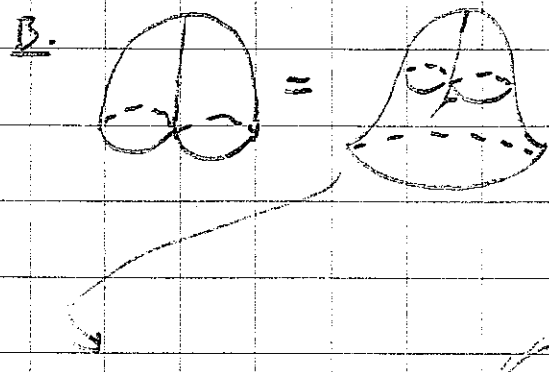
hoe dit algemeen zit: Laat $(f, \partial f) : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$
 wat zeggen de singulariteiten van ∂f over die van f ?
 (zie ook open bij § 5.)

Verdere voorbeelden:

Afbeeldingen van de Möbius band; $X(M)=0$



$d=2; R=0$
 $w_i=-2; C_i=0$
 $w_u=0; C_u=0$
 $d+R=0$



$d=1; R=0$
 $w_i=-1; C_i=0$
 $w_u=0; C_u=0$
 $d+R=1$

Men kan zo eindeloos doorgaan met het veranderen van voorbeelden.

Interessanter zijn de abstracties die men krijgt, zoals in de vorige paragraaf werd verteld:

beschrijving: komt voort in een contour patroon van een $f \in E_f$ voor.

bewijs: we merken eerst op dat de propositie 1:

$X(M) = \deg(\partial f) + w_i + w_u$ ook geldig is wanneer $\partial M = S^1 \cup \dots \cup S^1$
 als $\partial f: \partial M \rightarrow S^1$ (zelfde bewijs). Laat de k beschrijvingen
 $\frac{a}{a+2} \frac{a+4}{2} \frac{a+2}{a+2}$ zijn (beveel van de lijn als voorbeelden)

~~Deze laatste betrekking is, geldt $\beta_0(M)=1$, anders $X(M)=0$ hetgeen onmogelijk is. Z.O.Z. (*)~~

34 Op dezelfde wijze vindt men dat γ , δ etc.
 valt in eenzelfde patroon van $\epsilon \in \mathbb{Z}$ waarvan voorwaarde
 (*) Elk mogelijk kan stellen dat $B_f(M) = 1$, want omdat ϵ
 het een eenheid is, worden een talle andere composities
 van M onder ϵ dit is een ϵ op D^2 afgebeeld.

Naar aanpak $\mathcal{E}(M) = 2 + 2$ is het een tegevoorte $\square$.

§3. Singulariteiten & Jetbundels.

35.

§3.1.

We zullen nu het singulier zijn van een $f: M \rightarrow N$ in een punt $x \in M$ in iets algemenere termen bespreken.

Laat f een C^∞ -afbeelding tussen twee gladde variëteiten M en N met $\dim M = m$ en $\dim N = n$.

In het algemeen zal f zich in een punt $x \in M$ 'optimaal' gedragen, d.w.z. $df_x: T_x M \rightarrow T_x N$ heeft maximale rang vergelijkbaar met de dimensies van M en N , nl. $\min(m, n)$.

In deze gewone, niet-singuliere punten komt de impliciete functiestelling onmidddelijk 'normaal vooruit' voor f :

1) Als $\dim M > \dim N$ dan zijn er coördinaten in de buurt van $x \in M$ en $f(x) \in N$ z.d.d. $f: (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$

2) Als $\dim M \leq \dim N$ dan zijn er coördinaten z.d.d. $f: (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$.

In 1) verschijnt f lokaal als een projectie, in 2) als een inbedding. De overige punten, waar f zich dus niet optimaal gedraagt noemen we singuliere punten:

$S(f) = \{x \in M \mid \text{rang } df_x \leq \min(m, n)\}$ heet de singuliere verzameling. Aan gezien $S(f)$ door een rang conditie

afgefinieerd is, is het natuurlijk om $S(f)$ naar rang op te delen. We noteren $S_k(f) = \{x \in M \mid \text{rang } df_x = \min(m, n) - k\}$

$S_0(f)$ zijn de 'gewone punten', $S_k(f)$ de verz. van punten waar df_x een extra rang verlies k heeft. Het getal k is dus een eerste grove maat voor singulariteit. We hebben

$$S(f) = \bigcup_{k \geq 1} S_k(f).$$

Veelal beschouwt men de kritische verzameling

van een $f: M \rightarrow N$: $\Sigma_f = \{x \in M \mid \text{rang } df_x < n\}$ of de

36. verzamelingen $\Sigma_i = \{x \in M \mid \ker(df_x) = i\}$.

Als $\dim M \geq \dim N$ dan $S'(f) = \Sigma(f)$ & $S_k(f) = \sum_f^{m-n+k}$

$\dim M < \dim N$ dan $\Sigma_f = M$ & $S_k(f) = \sum_f^k$.

Duidelijk zal zijn: $\bar{S}_k(f) = \bigcup_{l \geq k} S_l(f)$.

A priori is er, net als in §1, nauwelijks controle over de structuur van de singulariteitenverzamelingen $S_k(f)$.

De enige afgeleide is de stelling van Morse-Sard:

Laat $f: M \rightarrow N$ glad; dan heeft $f(\Sigma_f)$ maat nul in N ofwel de reguliere waarde $N - f(\Sigma_f)$ zijn residuaal.

(Voor herijis zie [9]). Deze stelling is de hoeksteen van de transversaliteitstheorie, en juist door transversaliteitscondities kunnen we, net als in §1, de structuur van de $S_k(f)$ 'tellen'.

3.2. Resume Jetruimte

Een belangrijk principe in de wetenschap is het 'universaliseren' van een probleem: wanneer een probleem in verschillende situaties verschillende (en vaak wisselende) gedaantes vertoont dan kan men proberen een 'universele situatie' te vinden waar alle complexiteit aanwezig is, en waar het probleem in opgelost kan worden. De universele situatie is inhouds dus heel 'groot' maar heeft het voordeel van de overzichtelijkheid. Een (ruimte) voorbeeld is in §1 waar het ook zijn 'in opgelost' werd in het universele met zijn van de verlosende. Een generalisatie is de jetbundel

27

$J^k(M, N)$ van twee variëteiten M, N (de universaliteit
zou in § 4.5 bij de universele bundel weer opduiken.)

Laat $f: M \rightarrow N$ & $f(p) = q$

Definitie: * $J^k f(p)$ = equivalentieklasse van alle afbeeldingen
 $\gamma: (M, p) \rightarrow (N, q)$ waar van de partiële afgeleiden van orde $\leq k$
(in een of ander dus elke coördinaatensysteem) overeen komen met
die van f . $J^k f(p)$ heet de k-jet van f in p .

* $J^k(M, N)_{(p, q)} =$ verz. v. alle k-jets van p naar q .

* $J^k(M, N) = \bigcup_{(p, q) \in M \times N} J^k(M, N)_{(p, q)}$

* Er zijn natuurlijke afbeeldingen $\sigma: J^k(M, N) \rightarrow M$; $J^k f(p) \mapsto p$
en $\tau: J^k(M, N) \rightarrow N$; $J^k f(p) \mapsto f(p)$ de z.g. bron en dool
afbeeldingen. Laat $\pi: J^k(M, N) \rightarrow M \times N$; $\pi = \sigma \times \tau$

propositie: $J^k(M, N)$ heeft op natuurlijke wijze de structuur van
een vectorbundel over $M \times N$, met als projectie $\pi = \sigma \times \tau$

bewijs: triviaal; zie [g].

De vezel van deze bundel is diffeomorf met $J^k_{(0,0)}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) =: J^k(m, n)$

Dit is een Euclidische ruimte van dimensie $n \left\{ \binom{m+k}{k} - 1 \right\}$ en
kan geïdentificeerd worden met verz. van n -tupels van
macht reële in m -variabelen van graad $\leq k$.

Hoewel de vezels euclidisch zijn is er geen natuurlijke
optelling in de vezels voorhanden; i.h.a. is $J^k(M, N)$ dus geen
vectorbundel (zie verderop).

* We hebben: $J^0(M, N) = M \times N$; $J^1(M, N) = \text{HOM}(T_M, T_N)$

met T_M en T_N de op $M \times N$ teruggetrokken raakbundels

(J^1 is dus wel altijd een vectorbundel, in feite bij definitie
van de raakbundel.)

* Er zijn natuurlijke 'wegget projecties' $\pi_{k,l}$ $k \geq l$
 $\pi_{k,l}: J^k(M, N) \rightarrow J^l(M, N)$. Hierdoor zijn we in staat
 deelvarieteiten uit een lagere J^k omhoog te trekken
 naar een hogere J^k , met behoud van codimensie.

* Een $f: M \rightarrow N$ bepaalt een afbeelding
 $j^k f: M \rightarrow J^k(M, N); x \mapsto j^k f(x)$. Dit heet de
 k -jets extensie van f . In rechte zin is dit op te vatten
 als een globale invariante manier om onze k -de orde
 Taylor polynomen te praten.

Belangrijk is de volgende:

* Jet transversaliteitsstelling (zie Lg 3):

Laat A een deelvarieteit van $J^k(M, N)$. Dan is
 de verzameling $\{f \in C^k_2(M, N); j^k f \notin \bar{A}\}$ residuaal in
 $C^k_2(M, N)$ (en een als A gesloten.)

* Op $J^k(M, N)$ werkt de groep $G = \text{Diff}^k(M) \times \text{Diff}^k(N)$
 met $\text{Diff}^k(M)$ de groep van k -jets van diffeomorfismen van
 $M \rightarrow M$ d.w.z. $G \times J^k(M, N) \rightarrow J^k(M, N); (a, p), f \mapsto j^k(a \circ f \circ p^{-1})$
 (met a, p & f representanten; dit is goed gedefinieerd.)

Een baan van G onder deze actie noemen we een (globale)
singulariteit.

De groep $G_p := \{g \in G \mid g(p, p) = (p, p)\}$, de groep van k -jets
 van diffeomorfismen die p en q vast laten, werkt op
 $J^k_{(p,q)}(M, N) = J^k(m, n)$. Een baan onder deze actie
 willen we een lokale baan of singulariteit noemen.
 Propositie: lokale banen zijn gladde (reguliere) deel-
 varieteiten van $J^k(m, n)$.

Lemma: zie L5 (we stellen nu een algebraïsche actie) is

gevolg: globale banen zijn C^∞ -vezelbundels over $M \times N$ met vezel de locale baan.

benijg: zie ook appendix A. □

Voorbeelden: $J^1(M, N)$ kan voorgesteld worden als de verzameling $m \times n$ matrices. Onder linkes en recht coördinaten transformatie kan zo'n matrix altijd in de vorm $\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ geplaatst worden. Op 1-jet niveau is er dus een runderige klassificatie van singulariteiten: $J^1(M, N) = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_q$ met $q = \min(m, n)$ met $S_k = \{ \text{matrices met rang } q-k \} = \{ \text{matrices met exacte rang } k \}$. Zoals bijv. uit §5.2 volgt zijn de S_k gladde deelvarieteiten van codim $(m+k-q)(n+k-q)$ in $J^1(M, N)$. Dit is de klassieke Thom stratificatie.

We hebben $\tilde{S}_k = \bigcup_{p \times k} S_p$, een algebraïsche verz. gedef. door het vult zijn voor alle $q-k+1$ minoren v.d. matrix.

Voor een $f: M \rightarrow N$ is de geadjungeerde van df $\underline{df}: M \rightarrow \text{hom}(T_M, T_N)$ juist de 1-jet extensie $j^1 f$.

en $S_k(f) = (j^1 f)^{-1}(S_k) = (\underline{df})^{-1}(0)$ (vgl. §1.1)

Voor een residuële collectie $\Gamma \subset \tilde{C}_2^0(M, N)$ hebben we dus dat $S_k(f)$ een gladde deelvarieteit van codimensie $(m+k-q)(n+k-q) = k^2 + k|m-n|$ is.

* $\pi_{r,1}^{-1}(S_0) = R^r$ is één baan in $J^r(M, N)$ voor alle r , de reguliere banen. Echter, de $\pi_{r,1}^{-1}(S_k)$ gaan i.h.a. uiteenvallen in verschillende banen in $J^r(M, N)$.

Voor $n=1$ vinden we op 2-jet (en hoger) niveau het Morse (en van der Waerden) steeds eindig veel banen. Als echter $m^2 + n^2 < \frac{m+n(m+n)}{2}$ dan wordt de dimensie van de groter

te klein om ^{af te tellen} veel punten in $J^k(M, N)$ toe te laten (zie bijv. L53)

Aangeraden men i.h.a. maar aftelbaar veel transversaliteitslijnen kan stellen (om nog iets over te houden) is de boven opsplitsing te 'fijn' om generieke uitspraken te doen. Om toch een eindige klassificatie te houden kan men boven punten nemen. We zullen elke reguliere variëteit invariant onder de groepsactie de singulariteiten verzameling nemen.

* In §2. bleek het al nodig te zijn om $S_1(t)$, de enige generieke niet lege Thom verzameling onder te verdelen in $S_{1,0}$ en $S_{1,1}$. Dit brengt ons op de Thom-Boardman stratificatie, die intuïtief als volgt gaat: (Men neemt hier i.h.a. Σ superschone)

opmerking is $\Sigma^i(t)$ een gladde deelvariëteit. We kunnen nu $t \in \Sigma^i(t)$ bekijken en weer de Σ 's hiervan: $\Sigma^j(t \in \Sigma^i(t)) =: \Sigma^{i,j}(t)$. Als dit weer een variëteit is kan men $\Sigma^k(t \in \Sigma^{i,j}(t))$ vormen; notatie $\Sigma^{i,j,k}(t)$ etc. Men zit hier weer met hetzelfde probleem: er is geen a priori controle over de structuur van de Σ_f^I ; $I = (i, \dots, i_k)$

Het lijkt echter mogelijk te zijn om universele Σ^I $I = (i_1, \dots, i_k) \in J^k(M, N)$ te definiëren (Σ^I glad) z.d.d. $J^k_f \cap \Sigma^I \Rightarrow \Sigma^I(t) = (J^k f)^{-1}(\Sigma^I) \& \Sigma^I(f|_{\Sigma^I(t)}) = \Sigma^{(I,0)}(t)$. De opdeling van $J^k(M, N)$ in strata Σ^I heet de Thom-Boardman stratificatie. De definitie van de Σ^I is vrij bemoeilijk en ik heb geen zin om dat hier uit te voeren. Men leze het artikel van Boardman [19].

De constructie van de 2^e orde Thom-Boardman straten is nog vrij eenvoudig. Niet er voor twee vector bundels E en F over een gladde X $\Sigma^s(E, F) = \{dx: E_x \rightarrow F_x \mid \dim \ker(dx) = s\}$

Over de variëteit $S_r \subset J^1(M, N)$ hebben we bundels $\ker$ en $\text{co}\ker$. $\ker = \{ \text{ker}(\sigma) \mid \sigma \in \ker \}$, en analoge $\text{co}\ker$. De normaal bundel van S_r in $J^1(M, N)$ is natuurlijk isomorf met $\text{HOM}(\ker, \text{co}\ker)$. (zie App. B)

Door intrinsieke afgeleide (zie §4.2) komen van de z -jets in $\pi_{2,1}^{-1}(S_r) \subset J^2(M, N)$ krijgen we een afbeelding $\phi: \pi_{2,1}^{-1}(S_r) \rightarrow \text{HOM}(\ker \circ \ker, \text{co}\ker)$ van bundels over S_r , met $\ker \circ \ker$ het symmetrische product van $\ker$ met zichzelf. Laat nu ψ de afbeelding $\psi: \text{HOM}(\ker \circ \ker, \text{co}\ker) \rightarrow \text{HOM}(\ker, \text{HOM}(\ker, \text{co}\ker))$ en beschouw de verzameling $\Sigma^s(\ker, \text{HOM}(\ker, \text{co}\ker)) \subset \text{HOM}(\ker, \text{HOM}(\ker, \text{co}\ker))$

bewering: $\psi^{-1}(\Sigma^s(\ker, \text{HOM}(\ker, \text{co}\ker)))$ is een variëteit van codimensie $\frac{1}{2} k(k+1) - \frac{1}{2} (k-s)(k-s+1) - s(k-s)$ dus deel van $\text{HOM}(\ker \circ \ker, \text{co}\ker)$ met $k = \text{rang}(\ker)$ $l = \text{rang}(\text{co}\ker)$.

bewijs: zie [63] blz 153. Het idee is hetzelfde als in App. B.

Zet nu $S_{r,s} = \phi^{-1}(\psi^{-1}(\Sigma^s(\ker, \text{HOM}(\ker, \text{co}\ker))))$

Men gaat nu vrij eenvoudig na dat deze $S_{r,s}$ inderdaad overeen komt met de 2^e orde Thom-Boardman straten

oefening: Als $j'f \in \pi S_k$ $\forall k$ dan $S_g(f|_{S_r(f)}) = (j^2 f)^{-1}(S_{r,s})$

N.l: Laat $j'f(x) = \sigma$. Omdat $j'f \in \pi S_k$ komt de intrinsieke afgeleide een surjectie

$$df_x: T_x M \longrightarrow \text{Hom}(\ker \sigma, \ker \sigma)$$

$$\text{We weten } \ker df_x = T_x S_r(t)$$

$$\text{Als nu } x \in S_r(f|S_r(t)) \text{ dan } T_x S_r(t) \cap \ker \sigma = \emptyset$$

Dit betekent precies $j^2 f(x) \in \Sigma^0(\ker \sigma, \text{Hom}(\ker \sigma, \ker \sigma))$
 etc. $\square$.

Men kan zich voorstellen dat de constructie van hogere
 orden Σ^i 's steeds ingewikkelder wordt. Ook loopt de
 ordinatierij snel op. (Appendix 5 is een kort tabelletje
 voor $S_{r,s}$).

* Tot slot: hoewel $J^k(M, N)$ i.a. geen vector bundel is,
 kunnen we het altijd een differentiaalruimte:

$$E: J^k(M, N) \longrightarrow \text{Hom}\left(\sum_{i=0}^k \mathbb{R} T_i M, T_i N\right) \text{ definiëren.}$$

Pipin is $\mathbb{R}$ het k -voudige symmetrische product van
 een bundel met zich zelf. (zie [16])

$$\text{Lies afbeeldingen } e_M: TM \longrightarrow M; e_N: TN \longrightarrow N$$

z.d.d.: 1) e_M beperkt tot een sectie is identiteit op M

$\forall x \in M, \exists U_x$ omg. van x in $T_x M$ | $e_M|U_x$ is diffeomorfisme op x 's beeld.

(gelijk voor N). Voor een k -jet met representant $f; f(x)=y$

$$\text{betrachten we nu } \tilde{f} = (e_N|U_y)^{-1} \circ f \circ (e_M|U_x)^{-1}: U_x \longrightarrow U_y$$

(want bij U_x en U_y kiezen we lokale secties). U_x en U_y zijn

open delen v. vectorruimtes en we kunnen de k -de

afgeleide van $\tilde{f}$ nemen, opgevat als element in

$$\text{Hom}\left(\sum_{i=0}^k \mathbb{R} T_i U_x, T_i U_y\right). \text{ Al deze afgeleiden samen vormende}$$

een afs. bundels beschouwen levert het gevraagde

$$\text{differentialmorfisme } E: J^k(M, N) \longrightarrow \text{Hom}\left(\sum_{i=0}^k \mathbb{R} T_i M, T_i N\right)$$

§4. Vector bundels.

41.

We zetten in deze § enige veel voorkomende vectorbundel operaties op een rijtje. Bijna alles is triviaal.

Laat $E \xrightarrow{\pi} X$ een vector bundel over X , een gladde variëteit.

1. Het raak rijtje. De afgeleide functor levert het volgende diagram:

$$\begin{array}{ccc} T(E) & \xrightarrow{d\pi} & T(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

Aan gezien π een submersie is, hebben we de bundel $\text{Ker}(d\pi)$ over E . Wegens de universaliteit van de pull-back krijgen we het volgende exacte rijtje van vectorbundels over E :

$$(*) \quad 0 \rightarrow \text{Ker}(d\pi) \rightarrow T(E) \rightarrow \pi^*(T(X)) \rightarrow 0$$

Dit rijtje splitst in een niet natuurlijk over E .

Laat $s: X \rightarrow E$ een snede zijn, $\pi \circ s(x) = x$

We trekken $(*)$ terug tot E/X via s :

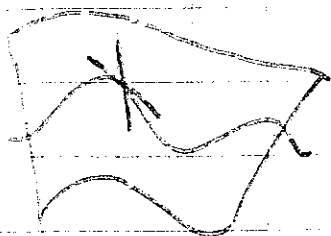
$$(**) \quad 0 \rightarrow s^* \text{Ker}(d\pi) \rightarrow s^* T(E) \rightarrow T(X) \rightarrow 0$$

Wegens $TX \xrightarrow{ds} TE$ en de universaliteit is er nu

$$\begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{ds} & TE \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[\pi]{\pi} & E \end{array} \quad \text{dan } \varphi: T(X) \rightarrow s^* T(E)$$

Dit levert een splijting van $T(E)$ langs de sectie:

$$s^* T(E) = s^* \text{Ker } d\pi \oplus \varphi(T(X))$$



Tot meer is geldig in elke vectorbundel. In een vectorbundel hebben we een universele sectie, de nulsectie

$\eta: X \rightarrow E; x \mapsto e_x$. We schrijven: $\eta^* T(E) = \eta^* \ker \pi \oplus T(X)$
(natuurlijke isomorfismen laten we weg)

2. Geïnducteerde afgeleide.

Laat nu $x \in X$ en $s: X \rightarrow E$ een sectie z.d.d. $s(x) = 0$.

Dan $ds_x: T(X)_x \rightarrow T(E)_x$. x ligt in de nulsectie;

daarom kan we schrijven $T(E)_x = \ker(\pi)_x \oplus T(X)_x$

$= T(E_x)_x \oplus T(X)_x = E_x \oplus T(X)_x$. Laat $\pi_{1,x}$ de

projectie op de eerste factor, $\pi_{2,x}$ die op de tweede.

$\pi_{1,x} \circ ds_x =: Ds_x: T(X)_x \rightarrow E_x$ is de geïnducteerde afgeleide

($\pi_{2,x} \circ ds_x = \text{id}$ identiteit).

propositie: Laat $s: X \rightarrow E$ een sectie; $N \subseteq E$ de nulsectie.

Dan: $s \in N \iff Ds_x: T(X)_x \rightarrow E_x$ is surjectief

$\forall x \in X, s(x) = 0$.

bewijs: triviale $\Leftarrow$

3. De dualisatie.

Laat $E \rightarrow X$ een vectorbundel van rang n en zij k een geheel getal $0 \leq k \leq n$

We associëren met E een vectorbundel $\gamma_k(E)$

van rang k over de ruimte $G_k(E)$, de Grassmann

k -steden bundel

$$G_k(E) = \{ (x, \alpha) \mid \alpha \text{ k-Mat in } E_x \} \quad \text{en}$$

$$\gamma_k(E) = \{ ((x, \alpha), v) \in G_k(E) \times E \mid v \in \alpha \}.$$

43

$G_k(E) \xrightarrow{p} X$; $(x, \alpha) \mapsto x$ is een vectorbundel met als vector $G_{k,n}$, de Grassmann van k -matrices in n -dimensionale vectorruimte.

We noteren $\gamma_k(E) \xrightarrow{p_k} G_k(E)$ voor de natuurlijke projectie.

De z.g. kanonieke normaalbundel $\nu_k(E)$ wordt gedefinieerd door het exacte rijtje over $G_k(E)$:

$$0 \longrightarrow \gamma_k(E) \longrightarrow p^*(E) \longrightarrow \nu_k(E) \longrightarrow 0.$$

Vlaggenbundels ontstaan door herhaald toepassen van dit procedé.

4. Intrinsieke afgeleide.

De hier gevolgende behandeling is gebaseerd op [3].

Laat E en F twee vectorruimten en zij $L: E \rightarrow F$ een lineaire afbeelding.

Laat $i = \dim(\ker L)$; $j = \dim(\text{Im } L)$

We beschouwen de geassocieerde Grassmannian van E & F :

$$\begin{array}{ccc} \gamma_i = \gamma_i(E) & E & \\ \downarrow & \downarrow & \\ G_i(E) & \longrightarrow 0 & \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ccc} \gamma_j(F) & F & \\ \downarrow & \downarrow & \\ G_j(F) & \longrightarrow 0 & \end{array}$$

44. Laat γ de kanonieke normaalbundel van $\gamma_j(F)$.

L bepaalt als volgt een sectie ϕ in $\text{HOM}(\pi_1 \gamma, \pi_2 \gamma)$:
(waarbij $\pi_1 : G_i(E) \times G_j(F) \rightarrow G_i(E)$ etc)

$$\phi : G_i(E) \times G_j(F) \rightarrow \text{HOM}(\pi_1 \gamma, \pi_2 \gamma)$$

$$(A, B) \rightarrow \pi_B \circ L \phi A$$

$$\text{waarbij } B \rightarrow F \xrightarrow{\pi_B} F/B; A \hookrightarrow E \rightarrow E/A$$

(dus beperken tot het i -vlak A en projecteren langs het j -vlak B).

Propositie: $D\phi(\ker L, \text{Im } L) = 0$, d.w.z. ϕ raakt aan de nulsectie.

Lemma: Nuldeeltje is $\phi(\ker L, \text{Im } L) = 0$;

$$D\phi_{(\ker L, \text{Im } L)} : T_{\ker L} G_i(E) \times T_{\text{Im } L} G_j(F) \rightarrow \text{HOM}(\pi_1 \gamma, \pi_2 \gamma)_{(\ker L, \text{Im } L)}$$

$$\text{Na geldt: } T_A G_i(E) = \text{hom}(A, E/A); \text{ idem } T_B G_j(F) = \text{hom}(B, F/B)$$

$$\text{X } \text{HOM}(\pi_1 \gamma, \pi_2 \gamma)_{(\ker L, \text{Im } L)} = \text{hom}(\ker L, \text{coker } L)$$

$$\text{Laat } \lambda \in \text{hom}(\ker L, E/\ker L); \mu \in \text{hom}(\text{Im } L, \text{coker } L)$$

$$\text{Dan } D\phi_{(\ker L, \text{Im } L)}(\lambda, \mu) = (\mu \circ L)|_{\ker L} + \pi_{\text{Im } L} \circ L \circ \lambda$$

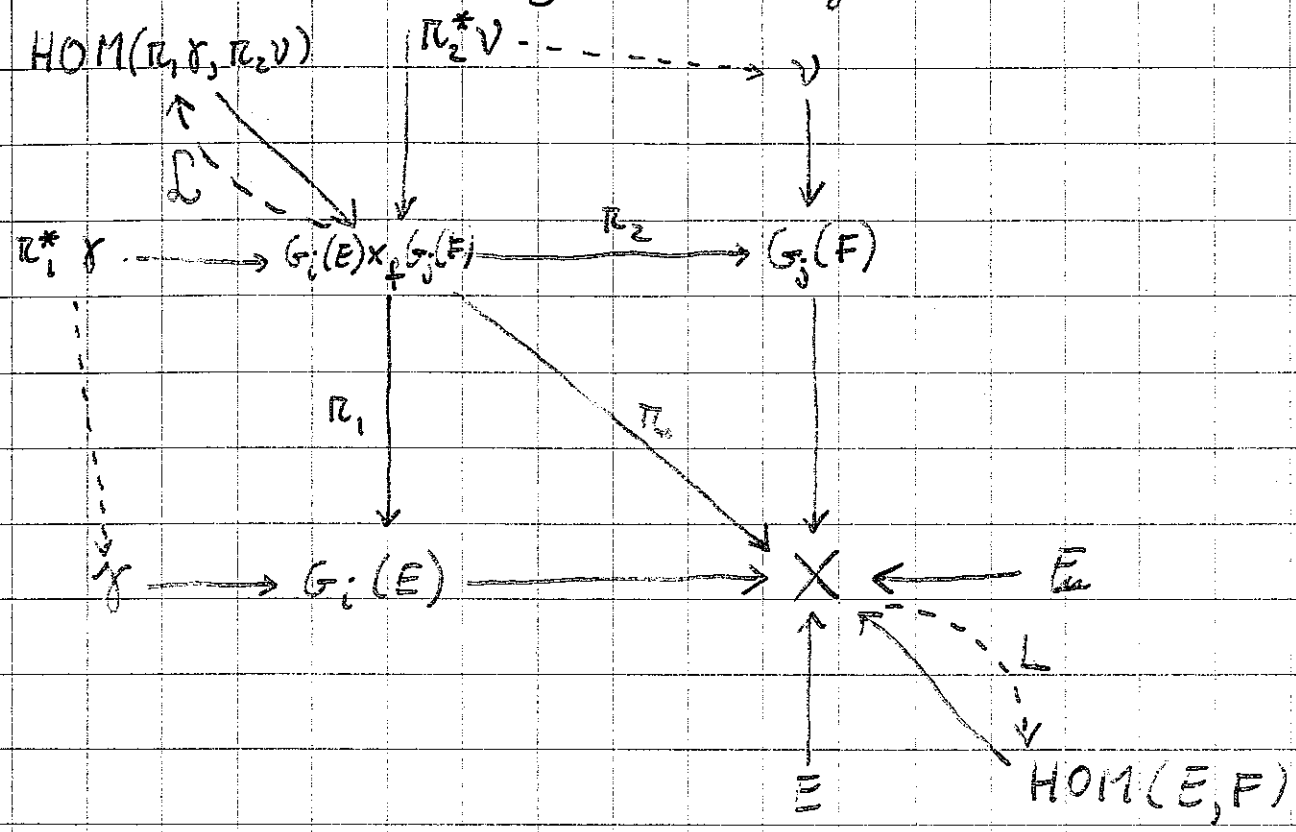
De eerste term is 0 omdat $\ker L$ de kern is van L , de tweede omdat $\text{Im } L$ het beeld is van L $\square$

Door dit eenvoudige resultaat toe te passen in de 'vervandelde versie' van bovenstaande constructie komen we tot het begrip 'intrinsieke afgeleide' van een bundel homomorfisme.

Laat nu $E \rightarrow X$, $F \rightarrow X$ vector bundels en
 een bundelhomomorfisme $E \rightarrow F$, opgevat als
 een sectie $L: X \rightarrow \text{HOM}(E, F)$

Laat $x \in X$ en $i = \dim(\ker L_x)$; $j = \dim(\text{Im } L_x)$

Beschouw het volgende diagram:



$$\gamma = \gamma_i(E); \quad \nu = \nu_j(F)$$

L is de sectie:

$$L: G_i(E) \times_F G_j(F) \longrightarrow \text{HOM}(\pi_1^* \gamma, \pi_2^* \nu)$$

$$(x, A_x, B_x) \longmapsto (x, A_x, B_x, \pi_{B_x} \circ L_x |_{A_x})$$

Duidelijk weer $L(x, \ker L_x, \text{Im } L_x) = 0$ dus:

$$DL_x: T_x(G_i(E) \times_F G_j(F)) \longrightarrow \text{hom}(\ker L_x, \text{Im } L_x)$$

Beschouw het raaderij r_j van de verking π in het punt

$$\underline{x} = (x, \ker L_x, \text{Im } L_x):$$

$$0 \longrightarrow T_{\underline{x}}(G_i(E_x) \times G_j(F_x)) \longrightarrow T_{\underline{x}}(G_i(E) \times_F G_j(F)) \longrightarrow T_x X \longrightarrow 0$$

Volgens de propositie is $DL_x(T_{\underline{x}}(G_i(E_x) \times G_j(F_x))) = 0$

46. dus $D\phi$ factoriseert natuurlijk tot een afbeelding

$$dL_x: T_x X \rightarrow \text{hom}(\ker L_x, \text{coher} L_x)$$

Dit is de intrinsieke afgeleide van Porteus.

In lokale coördinaten x_i voor x in een omgeving U_α worden $E = U_\alpha E_\alpha$, $F = U_\alpha F_\alpha$ wordt L als geschikte keuze van bases in E_x en F_x gegeven door de matrix $L_{ij}(x)$ van de vorm:

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \text{dim}(\text{coher} L_x) \\ \text{dim} \ker L_x \end{array} \right\} \text{dim}(\ker L_x)$$

Voor een vector $v = (v_1, \dots, v_n)$ is $dL_x(v)$ dan gegeven door $\left(\sum_k \frac{\partial L_{ij}}{\partial x_k} v_k \right)$ $i \gg \text{dim} \text{coher} L_x$ $j \gg \text{dim} \ker L_x$ $\in \text{hom}(\ker L_x, \text{coher} L_x)$

Voor een afbeelding $f: M \rightarrow N$ tussen twee gladde variëteiten bepaalt $df: TM \rightarrow TN$ een sectie $df: M \rightarrow \text{hom}(T_x M, T_x N)$ met $T_x M$ & $T_x N$ de op $M \times N$ teruggevoerde bundels. De intrinsieke afgeleide (i.e. afgeleide) $d df_x: T_x M \rightarrow \text{hom}(\ker df_x, \text{coher} df_x)$ geeft aanleiding tot de $\text{coher} df_x$ -waardige vorm $d_x: \ker(df_x) \times \ker(df_x) \rightarrow \text{coher} df_x$ die we in §2 al tegenkwamen. De Hessiaan van §1 $H(f): T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ is een speciaal geval.

— o —

Karakteristische klassen van vectorbundels $E \xrightarrow{\pi} X$ zijn zekere elementen in de cohomologiering $H^*(X)$ van X , die in zekere zin een maat zijn voor niet trivialiteit van de bundel. Er bestaat erg veel (zeer goede) literatuur over dit onderwerp (bijvoorbeeld [10] en [14]) en misschien wel een veel manieren om deze klassen in te voeren. Voor de 'volledigheid' van deze scriptie (of als opheffing op frissertje) geven we een overzicht van de belangrijkste zaken. Om een geheel te krijgen wat er zoal bij komt kijken geven we eerst enkele mogelijke definities aan.

A. (Stiefel's oorspronkelijke definitie). Laat X een CW-complex en $E \xrightarrow{\pi} X$ een vectorbundel. Laat $V_k(E)$ de geassocieerde Stiefel bundel; d.i. de bundel over X van k -frames in de vervals van E . De verval over x $V_k(E_x)$ is $(n-k-1)$ verbanden ($n = \text{rank } E$) dus er kunnen secties in $V_k(E)$ over het $(n-k)$ skelet gevonden worden. De primaire obstructie tegen uitbreiding over het $(n-k+1)$ -skelet komt te liggen in $H^{n-k+1}(X, \{\pi_{n-k} V_k(E_x)\})$. Na een bepaalde reductie mod 2 krijgen we klassen $w_k(E) \in H^k(X; \mathbb{Z}_2)$, de Stiefel-Whitney klassen van E .

B. (Chern-Weil theorie) Laat $E \xrightarrow{\pi} X$ een complexe vectorbundel. Laat Ω de krommings vorm v.e. connectie in deze bundel. T.o.v. een lokale basis van secties in E kan Ω opgevat worden als een $n \times n$ -matrix van 2-vormen. Laat P een invariant polynoom in de

48. complexe $n \times n$ -matrices. (dus $P(XY) = P(YX)$). Het volgt dan dat $P(R)$ een element in de de Rhoan cohomologie van X representeert dat alleen v.d. isomorfieklasse van de bundel afhangt. De elementen $c_r(E) := \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^r \sigma_r(R) \in H^{2r}(X; \mathbb{C})$, waarbij σ_r de elementaire symmetrische functies in de eigenwaarden zijn, heten de Chern klassen van E .

2. (Thom's definitie): Laat $E \xrightarrow{\pi} X$ een vectorbundel van rank n ; $E_0 = \{(x, 0) \mid 0 \neq 0\}$. Er is een 'inlijke' klasse $u_E \in H^n(E, E_0)$ z.d.d. voor $\forall x \in X$ $j_x^* u_E \in H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$ een vaste vertekening is, waarbij $j_x: (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \rightarrow (E_x, E_{0,x}) \subset (E, E_0)$ (infixities in $\mathbb{Z}/2$, voor oriënteerbare bundels in $\mathbb{Z}$). De afbeelding $\phi: H^*(X) \rightarrow H^{*+n}(E, E_0); a \mapsto \pi^* a \cup u_E$ is een isomorfisme, het z.g. Thom isomorfisme. (ϕ legt de cohomologie van X over in de bundel E). Thom's definitie: $w_k(E) = \phi^{-1}(Sq^k u_E) \in H^k(X; \mathbb{Z}_2)$ met Sq^k de mod 2 Steenrod square operatie.

We geven nu een meer systematische behandeling van karakteristieke klassen gebaseerd op de klassificatie stelling: Laat $F = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$.

Er is een 1-1 verband tussen isomorfieklasse van rank n F -vectorbundels over X (X paracompact) en homotopie klassen van afbeeldingen $X \rightarrow G_n(F^\infty)$.

Mer opmer: Voor elke bundel $E \xrightarrow{\pi} X$ is π op homotopie na inlijke $f: X \rightarrow G_n(F^\infty)$ (de z.g. klassificerende of Guirp afbeelding) z.d.d.:

$$\begin{array}{ccc}
 E \simeq f^*(\gamma_n) & \dashrightarrow & 0_n \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{f} & G_n(F^\infty)
 \end{array}$$

Het idee van het bewijs van deze stelling is vrij eenvoudig: als $E \subset \mathbb{R}^N \times X$ dan wordt f gegeven door $f(x) = E_x \subset \mathbb{R}^N$, opgevat als element in $G_n(\mathbb{R}^N)$. Voor X paracompact is er een lokaal eindige aftelbare overdekking U_i van X z.d.d. $\pi^{-1}(U_i)$ triviaal is. Met een partitie van de een kan men nu een $f: X \rightarrow G_n(F^\infty)$ bouwen. De homotopie invariantie is een gevolg van de trivialiteit van een bundel over een interval. $\square$

Constructie van karakteristieke klassen

Door heel bepaalde voortbrengers van $H^*(G_n(F^\infty), K)$ ($K = \mathbb{Z}_2$ als $F = \mathbb{R}$; $K = \mathbb{Z}$ als $F = \mathbb{C}$) via f op X terug te trekken krijgen we welgedefinieerde elementen in $H^*(X, K)$, die alleen van de bundel E afhangen, omdat f op homotopie na uniek door E bepaald wordt.

Van fundamenteel belang is de volgende propositie.

Spijtprincipe: Laat $E \xrightarrow{\pi} X$ vectorbundel.

Dan: $\exists f: Y \rightarrow X$ z.d.d. $f^*E = \bigoplus \pi_i$ met π_i lijnbundels en $f^*: H^*(X) \hookrightarrow H^*(Y)$

bewijs: zie [10].

50. bewering: Laat $k_n: \underbrace{FP^\infty \times \dots \times FP^\infty}_n \longrightarrow G_n(F^\infty)$

H269

de classificerende afbeelding van het n -voudige product van de universele vectorbundel γ_1 over de projectieve ruimte FP^∞ .

Dan is k_n een splijtafbeelding ^{van γ_n} ; k_n^* is injectief.

Laat n.l. $f: X \longrightarrow G_n(F^\infty)$ een splijtafbeelding van γ_n in vectorbundels $\mathcal{L}_i$ en laat $g_i: X \longrightarrow FP^\infty$ de classificerende afbeelding van $\mathcal{L}_i$; $g = (g_1, \dots, g_n): X \longrightarrow FP^\infty \times \dots \times FP^\infty$

Er volgt: $g^* k_n^* \gamma_n = \bigoplus \mathcal{L}_i = f^* \gamma_n$, dus $k_n^* f$ is homotopisch tot f dus $g^* k_n^* = f^*: H^*(G_n(F^\infty)) \hookrightarrow H^*(FP^\infty \times \dots \times FP^\infty)$ dus k_n^* is injectief. □

Lemma: $H^*(FP^\infty, K) \cong K[y]$ met y een voortkoling van $\deg(y) = 1$ als $K = \mathbb{Z}_2$; $\deg(y) = 2$ als $F = \mathbb{Q}$ en $K = \mathbb{C}$.

bewijs: zie L3

Er volgt: $H^*(FP^\infty \times \dots \times FP^\infty, K) \cong K[y_1, \dots, y_n]$

en dus $k_n^*: H^*(G_n(F^\infty), K) \hookrightarrow K[y_1, \dots, y_n]$

Het beeld van k_n^* is bevat in de algebra van de symmetrische polynomen. Laat c_i het i -de elementaire symmetrische polynoom in de $y_1, \dots, y_n$. Dan

$k_n^*: H^*(G_n(F^\infty), K) \hookrightarrow K[c_1, \dots, c_n]$ met

$\deg c_i = i$ als $F = \mathbb{R}$ en $\deg c_i = 2i$ als $F = \mathbb{C}$.

Mit de Eukleides - cellen decompositie van de Groebmann volgt nu dat k_n^* ook surjectief is.

Resumerend de blokken we dus:

propositie: $H^*(G_n(\mathbb{R}^\infty), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1, \dots, w_n]; \deg w_i = i$

$H^*(G_n(\mathbb{C}^\infty), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n]; \deg c_i = 2i$.

Het is niet mogelijk in te zien dat

$$i^*: H^*(G_n(F^\infty), K) \longrightarrow H^*(G_n(F^N), K)$$

met $i: G_n(F^N) \hookrightarrow G_n(F^\infty)$ afgeleid door de standaard inclusie $F^N \subset F^\infty$.

Mer op dat de $H^*(G_n(F^\infty), K)$ zeer prettige commutatieve ringen zijn (met cupproduct $\cup$ of $\cdot$).

Laat $E \xrightarrow{\pi} X$ een F vectorbundel en $f: X \rightarrow G_n(F^\infty)$ klassificerende afbeelding van E .

Definitie: de Stiefel-Whitney klassen van een $\mathbb{R}$ -bundel.

$$w_i(E) = f^*(w_i) \in H^i(X, \mathbb{Z}_2)$$

de Chern klassen van een $\mathbb{C}$ -bundel.

$$c_i(E) = f^*(c_i) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z}).$$

(opm: de cohomologie van $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ over $\mathbb{Z}$ is iets gecompliceerder. Terugtrekken van reële elementen hieruit levert de Pontryagin klassen $p_i(E) \in H^{4i}(X, \mathbb{Z})$. Men kan deze definiëren als $p_i(E) = (-1)^i c_{2i}(E \otimes \mathbb{C})$).

$$\text{We noteren: } w(E) = 1 + w_1(E) + \dots + w_n(E) \in H^*(X, \mathbb{Z}_2)$$

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \dots + c_n(E) \in H^*(X, \mathbb{Z})$$

der z.g. totale S-W en C-klassen.

De aldus gedefinieerde klassen zijn de unieke klassen die voldoen aan de volgende universaliteiten.

Laat $E \xrightarrow{\pi} X$ een F -bundel.

$$52. S-W_0: w_i(E) \in H^i(X, \mathbb{Z})$$

$$w_i(E) = 0 \quad i > n$$

$$L_0: L_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$$

$$L_i(E) = 0 \quad i > 2n$$

$$S-W_1: q: Y \rightarrow X \text{ dan}$$

$$q^*(w(E)) = w(q^*E)$$

$$L_1: q: Y \rightarrow X \text{ dan}$$

$$q^*(L(E)) = L(q^*E)$$

$$S-W_2: w(E \oplus F) = w(E) \cdot w(F)$$

$$L_2: L(E \oplus F) = L(E) \cdot L(F)$$

$$S-W_3: \text{voor } X_1 \rightarrow \mathbb{R}P \text{ geldt:}$$

$$w_1(X_1) \text{ voortkr. van } H^*(\mathbb{R}P, \mathbb{Z}_2)$$

$$L_3: \text{voor } X_1 \rightarrow \mathbb{C}P \text{ geldt:}$$

$$L_1(X_1) \text{ voortkr. van } H^*(\mathbb{C}P, \mathbb{Z})$$

Het is triviaal dat de bovenstaande klassen van 0, 1 & 3 voldoen. De Whitney formule $S-W_2$ & L_2 kunnen worden verkregen uit het spijteringsprincipe.

Voorbeelden:

* Laat $q: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ triviale bundel. Dan: $\begin{array}{ccc} q^*(\mathbb{C}P^1) & \xrightarrow{q} & \mathbb{C}P^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{q} & \mathbb{C}P^1 \end{array}$, dus $w_1(E) = w_1(q^*(\mathbb{C}P^1)) = q^*w_1(\mathbb{C}P^1) = q^*(1) = 1$, omdat $H^1(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{Z}$ $\forall i > 0$.

Verder: $w(E \oplus \mathbb{C}) = w(E) \cdot w(\mathbb{C}) = w(E)$, m.a.w. $S-W$ klassen en L -klassen zijn stabiel. Als E en F het zelfde element in $K(X)$ bepalen, dan $w(E) = w(F)$.

* Eerste telstelling. Laat $\mathcal{O}_n$ de n -lineaire triviale bundel en laat TS^n de raakbundel van de n -sfeer S^n .

Dan $1 = w(\mathcal{O}_{n+1}) = w(TS^n \oplus \mathcal{O}_1) = w(TS^n)$, m.a.w. door de stabiliteit 'zien' de $S-W$ klassen de triviale triviale van TS^n niet. Maar het zijn geheel anders, van welke de karakteristiek van S^n tot de triviale bundel op.

We zullen verder op voor oriënteerbare bundels de (niet stabiele) Euler klasse $e(E) \in H^n(X, \mathbb{Z})$ invoeren, die nog wel iets bij de (reële) stenen zit.

*. Laat $G_K(V)$ de Grassmanniaan van K -vallen in een reële of complexe lineaire ruimte van dimensie n . Laat $\gamma_K \rightarrow G_K(V)$ de kanonieke bundel. We beschrijven nu de raambundel $TG_K(V)$ aan $G_K(V)$ en geven aan hoe in principe de karakteristieke klassen berekend kunnen worden.

Voor een $A \in G_K(V)$ hebben we:

$$T_A G_K(V) = \text{hom}(A, V/A)$$

Als bundels kunnen we schrijven:

$$T G_K(V) = \text{HOM}(\gamma_K, \gamma_K^\perp) \quad \text{met}$$

$\gamma_K^\perp$ de kanonieke normaalbundel. Het is handig om dit iets anders op te schrijven:

$$\text{Schrijf } V = A \oplus V/A \quad \text{dus}$$

$$T_A G_K(V) \oplus \text{hom}(A, A) = \text{hom}(A, V)$$

Verbonden levert de formule:

$$T G_K(V) \oplus \text{HOM}(\gamma_K, \gamma_K) = \text{HOM}(\gamma_K, V)$$

$$\text{Laat nu } V = F^n. \text{ Dan } \text{HOM}(\gamma_K, V) = \underbrace{\gamma_K^* \oplus \gamma_K^* \oplus \dots \oplus \gamma_K^*}_n, \text{ met } \gamma_K^* = \text{HOM}(\gamma_K, F)$$

Voor een n -v F -bundel E laat $\text{HOM}(E, F)$ de duale bundel ($F = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$). Notatie: E^*

54. We werken nu verder een met Chern-klassen. De S-W klasse is gaa natuurlijk afgeleid van de Chern klasse door de volgende relatie:

Chern klasse afgeleid van de S-W klasse:

$$c(T\mathbb{P}^n(V)) \cdot c(\text{HOM}(\gamma_1, \gamma_2)) = c(\gamma_1^* \otimes \dots \gamma_2^*) \\ = [c(\gamma_1^*)]^n$$

Definitie: $\bar{c}(E) = 1/c(E)$ heet de inverse Chern klasse

Dus: $\bar{c}_1(E) + c_1(E) = 0$;

$$\bar{c}_2 + \bar{c}_1 c_1 + c_2 = 0$$

$$\bar{c}_3 + \bar{c}_2 c_1 + \bar{c}_1 c_2 + c_3 = 0$$

waaruit volgt: $\bar{c}_1 = -c_1$

$$\bar{c}_2 = -c_2 + c_1^2$$

$$\bar{c}_3 = -c_3 + 2c_2 c_1 - c_1^3$$

$\vdots$ etc.

I.v.m. is dus $\bar{c}_k$ een bepaald polynoom in de c_i $i \leq k$.

Om nu verder te komen moeten we formules hebben om $\text{HOM}(E, F)$ en E^* etc te berekenen.

propositie: voor lijnbundels λ_1 en λ_2 geldt:

1. $c(\lambda_1 \otimes \lambda_2) = 1 + c_1(\lambda_1) + c_1(\lambda_2)$

2. $c(\lambda_1^*) = 1 - c_1(\lambda_1)$

pluige: zie [10].

De combinatie met het Splijtprincipe kunnen we nu universele formules vinden om $c(E \otimes F)$ en, volgens $\text{HOM}(E, F) = E^* \otimes F$ voor $\text{HOM}(E, F)$ in termen van $c(E)$ en $c(F)$.

voorbeeld: Laat E en F 2-dimensionaal

$$c(E) = 1 + e_1 + e_2 \quad e_i = c_i(E)$$

$$c(F) = 1 + f_1 + f_2 \quad f_i = c_i(F)$$

$$\text{Dann } c(E \otimes F) = 1 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4$$

$$\text{met: } c_1 = 2(e_1 + f_1)$$

$$c_2 = e_1^2 + f_1^2 + 2(e_2 + f_2) + 3e_1 f_1$$

$$c_3 = e_1^2 f_1 + e_1 f_1^2 + 2(e_1 e_2 + f_1 f_2 + e_1 f_2 + e_2 f_1)$$

$$c_4 = e_1^2 f_2 + f_1^2 e_2 + e_2^2 + f_2^2 + f_1 f_2 e_1 + e_1 e_2 f_1 - 2e_2 f_2$$

$$\text{Voor } E^* \text{ geldt: } c_i(E^*) = (-1)^i c_i(E)$$

$$\text{I.h.b. } c_i(E^* \otimes E) = c_i(E \otimes E^*) = c_i((E^* \otimes E)^*) = (-1)^i c_i(E^* \otimes E)$$

$$\text{dus } \sum_{i=1}^n c_i \text{HOM}(E, E) = 0 \text{ en sterker: } c_{2i+1} \text{HOM}(E, E) = 0$$

Voorbeeld: als E 2-dimensionaal:

$$c(E) = 1 + a_1 + a_2 \text{ dan } c(\text{HOM}(E, E)) = 1 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4$$

$$\text{met } c_1 = 0; c_2 = 4a_2 - a_1^2; c_3 = 0; c_4 = 4a_1^2 a_2$$

$$\text{We hebben } c(TG_n(V)) = [c(\gamma_n^*)]^n \cdot \bar{c}(\text{HOM}(\gamma_n, \gamma_n))$$

Door toepassing van het bovenstaande kunnen we nu dus $c(TG_n(V))$ in principe uitdrukken in $c(\gamma_n)$.

Twee belangrijke gevallen:

$$\begin{aligned} * \quad c_1(TG_n(V)) &= n \cdot c_1(\gamma_n^*) + \bar{c}_1(\text{HOM}(\gamma_n, \gamma_n)) \\ &= -n \cdot c_1(\gamma_n) \end{aligned}$$

56. * $k=1$; vaak bundel van CP^{n-1}

$$c(TCP^{n-1}) = c(\gamma_1^*)^n \in \text{HOM}(\gamma_1, \gamma_1)$$

$\text{HOM}(\gamma_1, \gamma_1)$ is triviaal; $c(\gamma_1) := 1+z$, met

z de (geprefereerde) voortbrengster van $H^*(CP^{n-1}, \mathbb{Z}) =$

$\mathbb{Z}[z]/(z^n)$, volgens Axioma 3.

Er volgt: $c(TCP^{n-1}) = (1-z)^n$

of wel: $c_k(TCP^n) = (-1)^k \binom{n+1}{k} z^k$.

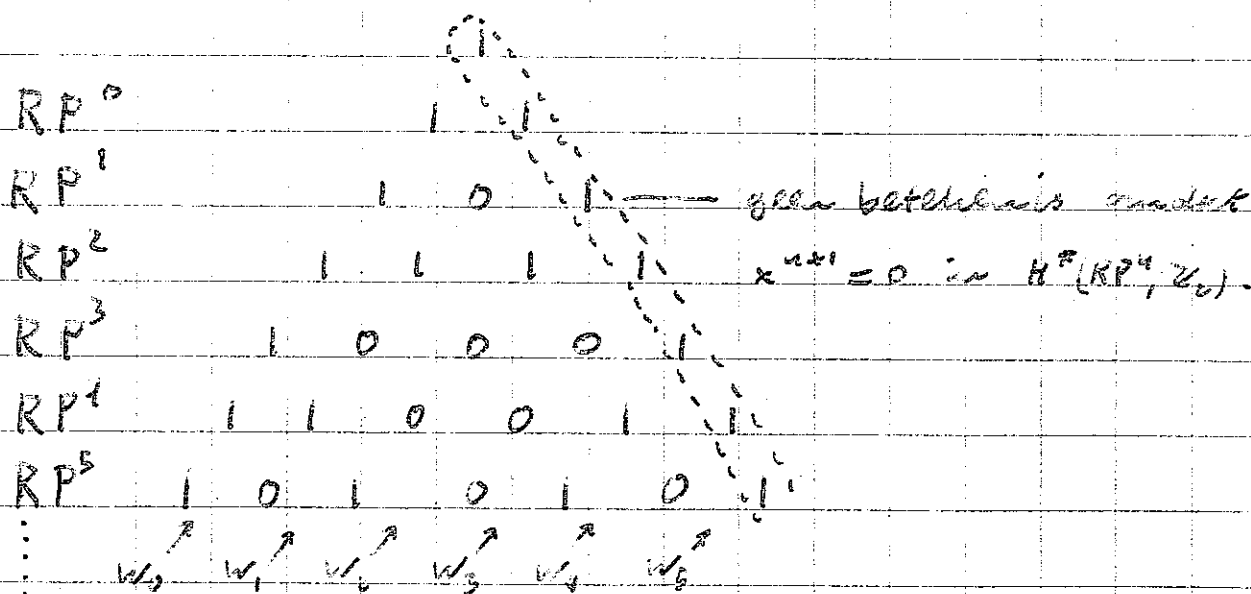
Voor de Stiefel-Whitney klassen vinden we

geheel analoge $w_k(TRP^n) = \binom{n+1}{k}_2 x^k$ met x

voortbrengster van $H^*(RP^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[x]/(x^{n+1})$.

We kunnen het wel of niet van zijn hier door

aflezen uit de derde driehoek van Pascal:



De eerste Stiefel-Whitney klasse heeft een speciale betekenis:

Propositie: M oriënteerbaar $\Leftrightarrow w_1(TM) = 0$

Bewijs: M oriënteerbaar $\Leftrightarrow \wedge^n TM$ (determ.-bundel) is triviaal

$\Leftrightarrow \exists$ sectie $\neq 0 \Leftrightarrow w_1(\wedge^n TM) = 0$. Voor een som van lijn bundels

$\oplus \mathbb{R}^2 = E$ geldt: $\wedge^n E = \otimes \mathbb{R}^2$; dus $w_1(\wedge^n E) = w_1(\otimes \mathbb{R}^2) =$

$\sum w_1(\mathbb{R}^2) = w_1(\oplus \mathbb{R}^2) = w_1(E)$. Uit het splitsingsprincipe volgt

dan: $w_1(\wedge^n TM) = w_1(TM)$; dus klaar $\square$

opm: Algemeener: $E \xrightarrow{R} X$ E oriënteerbaar $\Leftrightarrow w_1(E) = 0$ 57

Gerwz: RP^n oriënteerbaar $\Leftrightarrow n$ oneven.

* Propositie: (Cohomologiering van $G_k(V)$)

Laat $V = F^n$ en $i: G_k(F^n) \rightarrow G_k(F^\infty)$ de kanonieke injectie. Merk op dat i tegelijkertijd de klassificerende afbeelding van $\gamma_k(F^n)$ is.

$$i^*: H^*(G_k(F^\infty), K) \rightarrow H^*(G_k(F^n), K)$$

dus: $H^*(G_k(F^n), K) = K[c_1, c_2, \dots, c_k] / I_{n,k}$
met $I_{n,k}$ een zeker ideaal. ($I_{n,k}$ = ker i^*)

We hebben: $i^* \gamma_k = \gamma_k(F^n)$ dus

$$c \cdot i^* \gamma_k = i^* (c \gamma_k) = c(\gamma_k(F^n)) \Rightarrow$$

$$c_l(\gamma_k(F^n)) = c_l \text{ mod } I_{n,k}.$$

bewerking: $I_{n,k} = (\bar{c}_{n-k+1}, \dots, \bar{c}_n)$.

belang: Het is eenvoudig in te zien dat deze relaties tussen de c_l zeker gelden:

Het kanonieke rijtje (84.3) bij

$$\begin{array}{ccc} \gamma_k(F^n) & & F^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_k(F^n) & \xrightarrow{p} & 0 \end{array}$$

$$is: \quad 0 \rightarrow \gamma_k(F^n) \rightarrow p^* F^n \rightarrow \nu_k(F^n) \rightarrow 0.$$

De normaal bundel ν_k heeft rang $n-k \Rightarrow$

$$c_l(\nu_k(F^n)) = 0 \text{ voor } l \geq n-k+1$$

$$\text{De formule } c \gamma_k(F^n) = c \nu_k(F^n) = c p^* F^n = 1$$

geeft precies de vermeldde relaties $\bar{c}_l = 0$ $l \geq n-k+1$

Dat dit precies dezelfde relaties oplevert is niet zo eenvoudig in te zien. Het kan gedaan worden

door te kijken wat $\dim_R H^*[K[c_1, \dots, c_k] / I_{n,k}]^r$ wordt en dit te vergelijken met $\dim_K H^*(\gamma_k(F^n), K)$

58. die uit de Eilenberg-MacLane-decompositie volgt; n.2

$$\dim_K H^r(G_K(F^n), K) = p_{n,K}^r$$

met: $p_{n,K}^r$ = aantal manieren om het getal r te schrijven als som van ten hoogste $n-k$ getallen die elk $\leq k$ zijn

(?) Wordt een additieve basis voor $H^r(G_K(F^n), K)$

geleverd door de monomen $c = \prod c_i^{d_i}$

met $\sum i d_i = r =: \deg(c)$ en $\sum d_i \leq n-k$

(Aantal klopt in elke graad).

voorbeeld: ① RP^{n-1} : $H^*(RP^{n-1}, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1] / I_{n,n,1}$

$$I_{n,n,1} = (\bar{w}_{n+k}) ; \quad w_1 + \bar{w}_1 = 0 ; \quad w_2 + w_1 \bar{w}_1 + \bar{w}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \bar{w}_2 = w_1^2 \Rightarrow \dots \bar{w}_k = w_1^k$$

daar is der haad $H^*(RP^{n-1}, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1] / (w_1^n)$

② $G_2(\mathbb{R}^4)$: $H^*(G_2(\mathbb{R}^4), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1, w_2] / (\bar{w}_3, \bar{w}_4)$

$$= \mathbb{Z}_2[w_1, w_2] / (w_1^3, w_1^2 w_2 + w_2^2)$$

Monomen diagram:

0	1	2	3	4	-	-	-
1	w_1	w_1^2	w_1^3	w_1^4			
		w_2	$w_1 w_2$	$w_1^2 w_2$			
				w_2^2			

additieve basis:

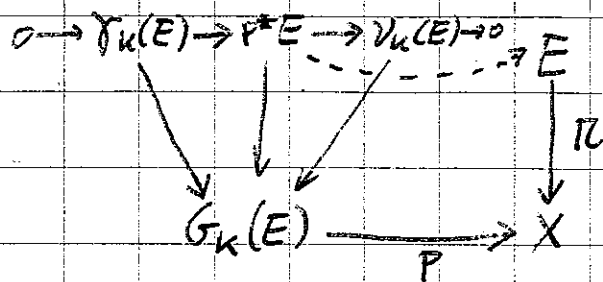
0	1	2	3	4
1	w_1	w_1^2	$w_1 w_2$	w_2^2
		w_2		

Een generalisatie van bovenstaande propositie

is:

Laat $E \xrightarrow{\pi} X$ een vector bundel van rang n .

Beschouw het geassocieerde k -vlakken diagram:
(zie § 4.3).



De cohomologiering van $G_k(E)$ wordt gegeven door $H^*(X)[\gamma_1, \dots, \gamma_k] / I_{n,k}$

met $I_{n,k}$ het ideaal voortgebracht door het kanonieke rijtje: $c(\gamma_k(E)) \cdot c(\gamma_k(E)) = c(p^*E)$

Dus $I_{n,k} = (\gamma_{n-k+1}, \dots, \gamma_n)$

met γ_k oplossing van het stelsel

$$\sum_{k=0}^p \gamma_k \cdot \gamma_{p-k} = c_p(E)$$

Dit volgt direct uit de Stelling van Leray-Hirsch
(zie [10]) en onderstaande propositie.

Nu we iets over de structuur van $H^*(G_k(\mathbb{R}^n), \mathbb{Z}_2)$ weten, kunnen we zien:

$$* \quad w_1(TG_k(\mathbb{R}^n)) = n w_1(\gamma_k) = n \cdot w_1 \in \mathbb{Z}_2[\gamma_1, \dots, \gamma_k] / I_{n,k}$$

Als $k \neq 0, n$ dan $w_1 \neq 0$ in de ring

dus: $G_k(\mathbb{R}^n)$ oriënteerbaar $\Leftrightarrow n$ even.

Algemeener vinden we voor de reële vlakke producten

$$V_d = \{d_1\text{-vlakken} \cup d_2\text{-vlakken} \cup \dots \cup \mathbb{R}^{d_n}\}$$

$$d = (d_1, \dots, d_n); 0 < d_1 < d_2 < \dots < d_n$$

V_d oriënteerbaar $\Leftrightarrow d_k$ even voor $k \geq 2$.

60. * Een eerste hint betreffende de relatie tussen karakteristieke klassen en singulariteiten vindt men in de obstructie van immersies van een variëteit M in de $\mathbb{R}^k$.
 Laat $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ een immersie. We hebben dan een uitsluitend gedefinieerde normaalbundel ν_f op $f(M)$.
 Dit levert het volgende exacte rijtje van bundels over M^n :

$$0 \rightarrow TM \rightarrow f^*(\mathbb{R}^k) \rightarrow \nu_f \rightarrow 0$$

met ν_f de teruggetrokken bundel. Deze heeft rang $n-k$, dus $w_l(\nu_f) = 0$ voor $l \geq n-k+1$.

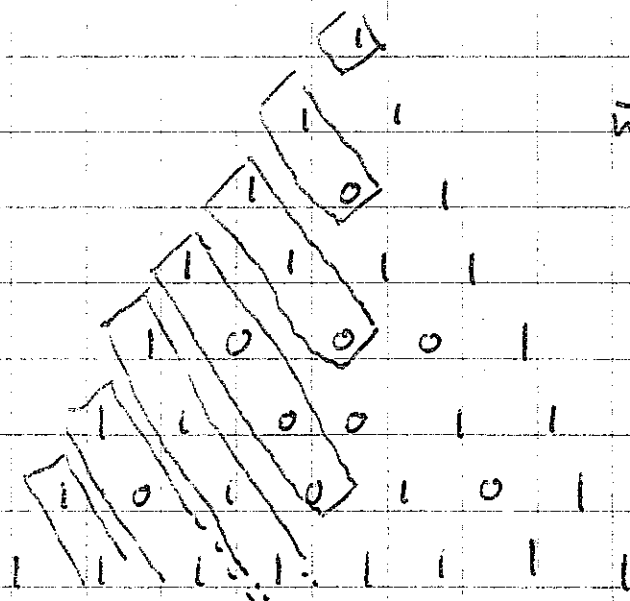
Echter $w(TM) \cdot w(\nu_f) = w f^* \mathbb{R}^k = 1$

dus $\bar{w}_l(TM) = 0$ voor $l \geq n-k+1$.

Voor $\mathbb{R}P^n$ hebben we $w(\mathbb{R}P^n) = (1+x)^{n+1}$

dus $\bar{w}(\mathbb{R}P^n) = (1+x)^{-n+1} \Rightarrow \bar{w}_k(\mathbb{R}P^n) = \binom{n+k}{k} x^k$

Door de driehoek van Pascal 'schuin af te lezen' vinden we de inverse SW-klassen:



Dus:

$$\bar{w}(\mathbb{R}P^0) = 1$$

$$\mathbb{R}P^1 = 1 \ 0$$

$$\mathbb{R}P^2 = 1 \ 1 \ 0$$

$$\mathbb{R}P^3 = 1 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$\mathbb{R}P^4 = 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0$$

$$\mathbb{R}P^5 = 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$\mathbb{R}P^6 = 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$\mathbb{R}P^7 = 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$\mathbb{R}P^8 = 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0$$

$$\mathbb{R}P^9 = 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0$$

Bovenstaande opmerking leert ons nu:

61.

RP^4 niet immersief in $\mathbb{R}^6$

RP^5 " " " $\mathbb{R}^6$

RP^8 " " " $\mathbb{R}^{14}$

RP^9 " " " $\mathbb{R}^{14}$

$$\text{I.h.a. } \bar{w}(RP^{2^n}) = (1+x)^{-(2^n+1)} = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1+x^{2^n}} = \\ = (1+x+\dots+x^{2^n}) \cdot (1+x^{2^n}) = 1+x+\dots+x^{2^n-1}$$

dus voor $k=2^n$ gaat RP^k niet immersief in $\mathbb{R}^{2k-2}$

Dit laat zien dat de Whitney immersiestelling in z'n algemeenheid scherp is ($\exists f: M^k \rightarrow \mathbb{R}^{2k-1}$ immersief).

De volgende opmerking, afkomstig van Pontragin, werpt een heel ander licht op het verlen van de $\mathbb{Z}_2$ -klassen van de raakbundel van een gladde variëteit.

Laat $\dim M = n$ en laat $[M]_i \in H_n(M, \mathbb{Z}_2)$ z'n $\mathbb{Z}_2$ fundamentele klasse. Laat $w_i = w_i(TM)$ en zij

$\Lambda = \prod w_i^{a_i}$ een monoom van graad $\deg(\Lambda) = \sum a_i = n$

Het mod 2 getal $\langle \Lambda, [M] \rangle \in \mathbb{Z}_2$ heet het Stiefel-Whitney getal van M corresponderend met Λ

bevestiging: Als M compact en $M = \partial W$ met W compact dan zijn alle Stiefel-Whitney getallen van M nul.

N.l. laat $[W] \in H_{n+1}(W, \partial W)$ de fundamentele klasse van W dan $\partial[W]$ fundamentele klasse in $H_n(\partial W) = H_n(M)$

$$\text{Dus: } \langle \Lambda, [M] \rangle = \langle \Lambda, \partial[W] \rangle = \langle \delta \Lambda, [W] \rangle$$

Echter: laat $i: M \rightarrow W$, dan $i^*TW = TM \oplus \mathbb{Z}$ met

$\mathbb{Z}$ 1-dimensionale triviale bundel, volgens 'Cotter Neighbourhood'

dus: $w(TM) = i^*w(TW)$. Dus $\Lambda = i^*\Lambda'$ met Λ' het corresponderende monoom in de $w_i(TW)$. Volgens de

62. exacte cohomologie r.g. van het paar (W, M) volgt.

$$\delta i^* = 0 \text{ dus } \langle \delta \wedge, [W] \rangle = \langle \delta i^* \wedge', [W] \rangle = 0 \quad \square$$

Direct gevolg is dat de S-W getallen bordisme invarianten van M zijn, d.w.z. als M en M' compact bordant zijn ($M + M' = \partial W$, W compact) dan hebben M en M' dezelfde S-W getallen.

(Thom's resultaat dat de S-W getallen een complete bordisme invariant vormen is veel moeilijker.)

* Feit: $\langle w_2(TM), [M] \rangle$ is de mod 2 Euler karakteristiek van M .

Het feit dat als $M = \partial W$ dan $\chi(M) \equiv 0 \pmod{2}$ is als volgt in te zien: $\chi(2W) = 2\chi(W) + \chi(M) \pmod{2}$

Als $\dim M$ oneven $\Rightarrow \chi(M) = 0 \pmod{2}$; als $\dim M$ even -
dan $\dim 2W$ oneven $\Rightarrow \chi(2W) = 0 \Rightarrow \chi(M) = 2\chi(W) \pmod{2}$
dus ook $\chi(M) = 0 \pmod{2}$.

I.k.b. is dus RP^{2k} geen rand. (en RP^{2k+1} wel).

Overigens moet men er bij S-W klassen van de raakbundel van een gladde variëteit steeds op in bedenken zijn dat deze niet 'onafhankelijk' zijn: er zijn heel triviale relaties die voor elke variëteit van een bepaalde dimensie gelden.

Zo is voor elke 2-dim M : $w_2(TM) = w_1^2(TM)$

elke 3-dim M : $w_1(TM) \stackrel{=0}{\Rightarrow} w_2(TM) = w_3(TM) = 0$ (!)

Dus voor 2-dim M is $\chi(M) \pmod{2}$ een complete bordisme invariant; voor $\dim M = 3$ geldt $M = \partial W$ etc.

Tot slot van deze paragraaf het begrip Euler klasse.

* Laat $\zeta: E \xrightarrow{\pi} X$ een vectorbundel van rang n .

en $E_0 \subset E$ de verz. vector $\neq 0$.

Noteer $j_x: (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \rightarrow (E, E_0)$ de inclusie in (E_x, E_{0x})

De bundel E heet orienteerbaar wanneer er een klasse

$U_\zeta \in H^n(E, \mathbb{R})$ z.d.d. $j_x^*: H^n(E, \mathbb{R}) \rightarrow H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$ met

$j_x^* U_\zeta$ voortbrengt van $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \cong \mathbb{Z}$, waarbij cohomologie met coëfficiënten in $\mathbb{Z}$ verondersteld zijn.

Laat $\phi: H^*(X) \rightarrow H^{*+n}(E, E_0)$ het Thom-isomorfisme

$$a \mapsto \pi^* a \cdot U_\zeta$$

(zie boven), laat $j^*: H^*(E, E_0) \rightarrow H^*(E)$ en

$\pi^*: H^*(E) \xrightarrow{\sim} H^*(X)$. De klasse $e(E) := \pi^{*-1} \cdot j^* \cdot U_\zeta \in H^n(X)$

heet de Eulerklasse van de (orienteerbare) bundel E .

Men ziet snel in: $e(E) = \phi^{-1}(U_\zeta \cup U_\zeta)$

(De mod 2 versie voor niet orienteerbare bundels is geheel analoog en geeft $\phi^{-1}(U_\zeta \cup U_\zeta) = \phi^{-1}(Sq^n U_\zeta) =: w_n(E)$.)

De formule $e(E) = \phi^{-1}(U_\zeta \cup U_\zeta)$ betekent zoveel als de zelfintersectie van de minste afgevat de coupling in $H^n(X)$. Verbaard is het dan ook niet dat voor M orienteerbaar geldt: $\langle e(TM), [M] \rangle = \chi(M)$.

De Eulerklasse heeft de volgende eigenschappen

1. $e(E) \in H^n(X)$
2. $f: Y \rightarrow X$; $f^*(e(E)) = e(f^*E)$
3. $e(E \oplus F) = e(E) \cdot e(F)$.



§5. Thom Polynoomstelling

In 1956 maakt Thom [17] de volgende opmerking:

Laat $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ transversaal op de Thom-Boardman strata. De afsluiting van de variëteit $S_r(f) = \{x \in M \mid \dim \ker df_x = n-p+r\}$ (we stellen een $n \geq p$ en M compact), $\bar{S}_r(f)$ heeft een fundamentele homologie klasse $[\bar{S}_r(f)] \in H_{p-1}^{top}(\bar{S}_r(f))$.

We kunnen f altijd opvatten als samenstelling van een inbedding $i: M \rightarrow \mathbb{R}^{k+p}$ (k groot genoeg)

in de standaard projectie $\pi: \mathbb{R}^{k+p} \rightarrow \mathbb{R}^p$. De conditie dat $x \in \bar{S}_r(f)$ vertaalt dan de conditie:

$\dim_x(T_x M) \cap \mathbb{R}^k \geq n-p+r$. Dit is een reële Schubert conditie op vlakken in $G_n(\mathbb{R}^{k+p})$ en de duale homologie klasse van deze Schubert-klasse kan uitgedrukt worden in de Stiefel-Witnisky klassen van $G_n(\mathbb{R}^{k+p})$. Er volgt dat de cohomologie klasse die aan $[\bar{S}_r(f)]$ afgelezen wordt door diezelfde uitdrukking in de S-W klassen van TM , die nu afhangt van f afhangt. Zo blijkt de duale klasse van $[\bar{S}_1(f)]$ afgelezen te worden door $w_{n-p+1}(TM)$. Voor een compacte 3-variëteit geldt $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ (§4.5) dus $[\bar{S}_1(f)]$ is daar bijv altijd nul.

Deze opmerking werd in 1957 generaliseerd tot wat men nu noemt de Thom polynoomstelling. We zullen een schets proberen te geven van de

66, ook iere overtuigingen en het verij. En alle twee
het belangrijke details blijven hier onbesproken.

Definitie: Laat S een variëteit in een ruimte
 X (steeds een variëteit). $\bar{S}$, de afsluiting van S in X
draagt een fundamentele homologie klasse als
een element $[S] \in H_n(\bar{S}, \mathbb{Z})$ (na den S) bestaat
z.d.d. voor alle $x \in \bar{S}$ geldt dat $H_n(\bar{S}, \bar{S}-x) = \mathbb{Z}$
en $j_{x*}([S]) \in H_n(\bar{S}, \bar{S}-x)$ de voorbeeld is.
Hierbij is $j_x: \bar{S} \rightarrow (\bar{S}, \bar{S}-x)$ de inclusie en voel,
zoals eerder in deze paragraaf, gesloten draagte
homologie afbreken worden (zie Appendix V.)

De de klassen van existentie van draagte klassen
en de eigenschappen ervan zullen we een vergelijk-
lijke inform; de leer zij verhelden naar het artikel
van Buch & Huelfiger [2], waar ik nog weinig van
blijft.

Belangrijk is dat fundamentele klassen, onder bepaalde
voorwaarden, terug af te leiden kunnen worden:

Laat $f: X \rightarrow Y$ en $S \subset Y$ z.d.d. $\bar{S}$ een fund.
klasse draagt. Als $f \cap \bar{S}$ en $f^{-1}(\bar{S})$ een draagte
dort is van $f^{-1}(\bar{S})$ dan draagt $\overline{f^{-1}(\bar{S})} = f^{-1}(\bar{S}) \subset X$
een fundamentele eigenschap met de ligging p :

$$D i_*[f^{-1}(\bar{S})] = f^* D j_*[S]$$

met $i: f^{-1}(\bar{S}) \rightarrow X$; $j: \bar{S} \hookrightarrow Y$ de inclusies
en $D: H_* \rightarrow H^*$ het Poincaré isomorfisme.

Definitie: Laat $\Sigma_{(x,y)} \subset J^k_{(x,y)}(M,N)$ een varieteit, invariant onder de groepsactie, in de verpakking van de jet bundel van variëteiten M & N .

$\Sigma_{(x,y)}$ heet een singulariteit type wanneer $\Sigma_{(x,y)}$ een fundamentele klasse draagt.

Als $\Sigma_{(x,y)}$ een algebraïsche verzameling is, dan heet $\Sigma_{(x,y)}$ altijd een fundamentele klasse. (Ziekt voort met een algebraïsche type.) J.h.b. zijn de Thom-Boardman strata Σ^I algebraïsche typen.

Een (locaal) singulariteit type $\Sigma_{(x,y)}$ bepaalt een globale varieteit $\Sigma \subset J^k(M,N)$, waarvoor Σ dan ook een fundamentele klasse draagt.

Definitie: Laat $\Sigma \subset J^k(M,N)$ een type.

$f: M \rightarrow N$ heet type transversaal wanneer $j_k f: M \rightarrow J^k(M,N)$, $j_k f \pitchfork \Sigma$ en $(j_k f)^{-1}(\Sigma)$ dicht in $(j_k f)^{-1}(\bar{\Sigma})$ ligt. Volgens het bijbehorende draagt $\Sigma(f) := (j_k f)^{-1}(\bar{\Sigma})$ een fundamentele klasse.

Voor de Thom-Boardman typen is er dus nog een residuale collectie $JB \subset C^{\infty}_f(M,N)$ z.d.a. $f \in JB \Rightarrow f$ type transversaal op alle Σ^I .

We komen nu toe aan de formulering van de Thom polynoomstelling.

69. Laat M, N glad van dim m resp. n .

Laat Σ een type in $J^k(M, N)$

Laat $f: M \rightarrow N$ glad en type transversaal op Σ .

Dan is er een universeel polynoom P_Σ (het z.g. Thom polynoom van Σ) in de Stiefel-Whitney klassen $w_i(TM)$ en $f^*w_j(TN)$ z.d.d.:

$$D \in [\bar{\Sigma}(f)] = P_{\Sigma} (w_i(TM), f^*w_j(TN))$$

met $i: \bar{\Sigma}(f) \hookrightarrow M$ en $D: H_*(M, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(M, \mathbb{Z}_2)$

Gevolg: de duale klasse van $\bar{\Sigma}(f)$ hangt alleen van de homotopie van f af. I.h.b. voor $N = \mathbb{R}^n$ hangt $D \in [\bar{\Sigma}(f)]$ slechts van de $w_i(TM)$ af.

Bewijs: $J^k(M, N) \cong \bigoplus_{i=1}^n \text{HOM}(\tilde{O}TM, \tilde{O}TN)$ volgens §3.

M.b.v. klassificerende afbeeldingen voor TM en TN vinden we een $\phi: M \times N \rightarrow G_m(\mathbb{R}^m) \times G_n(\mathbb{R}^n)$ z.d.d.

$$\phi^* \text{HOM}(\tilde{O}TN, \tilde{O}TM) \cong \bigoplus_{i=1}^n \text{HOM}(\tilde{O}TM, \tilde{O}TN)$$

Als we ϕ als een punt in $G_m(\mathbb{R}^m) \times G_n(\mathbb{R}^n)$

in de ruimte zien en structuren ϕ als $J^k(M, N)$ bekijken

$$\begin{array}{ccc} J^k(M, N) & \xrightarrow{\quad \phi \quad} & E \\ \downarrow \pi & & \downarrow p \\ M \times N & \xrightarrow{\quad \phi \quad} & G_m(\mathbb{R}^m) \times G_n(\mathbb{R}^n) \end{array} \quad \text{commutatie}$$

Omdat we een transitieve groep over E kunnen vinden

het type Σ een variëteit en deelbundel $G\Sigma \subset E$ z.d.d.

$\nu^* G\Sigma = \Sigma$. $G\Sigma$ draagt ook de fundamentele klasse $[G\Sigma]$. Laat $j: G\Sigma \rightarrow E$, $k: \bar{\Sigma} \rightarrow J^k(M, N)$

We hebben $(p^*)^{-1} Dj_*[\bar{G}\bar{E}] \in H^*(G_m \times G_n)$

69.

De cohomologie ring $H^*(G_m(\mathbb{R}^n) \times G_n(\mathbb{R}^n))$ wordt voortgebracht door de Stiefel-Whitney klassen, dus dit element is ~~dit~~ te schrijven als $P_\Sigma(w_i, w_j)$ met P_Σ een of ander polynoom. Er volgt:

$$\begin{aligned} \psi^* Dj_*[\bar{G}\bar{E}] &= \psi^* p^* P_\Sigma(w_i, w_j) \\ &= Dk_*[\psi^{-1}\bar{G}\bar{E}] = Dk_*[\bar{\Sigma}] \end{aligned}$$

Aangenomen $p\psi = \phi\pi$ komt er:

$$\begin{aligned} Dk_*[\bar{\Sigma}] &= \pi^* \phi^* P_\Sigma(w_i, w_j) \\ &= \pi^* P_\Sigma(w_i(TM), w_j(TN)) \end{aligned}$$

Beschouw nu:

$$\begin{array}{ccc} & j^k f \nearrow & J^k(M, N) \\ & & \downarrow \pi \\ \bar{\Sigma}(t) \hookrightarrow M & \xrightarrow{j^0 f = 1 \times f} & M \times N \end{array}$$

Omdat f type transversaal is kunnen we $Dk_*[\bar{\Sigma}]$ terug trekken: $(j^k f)^* Dk_*[\bar{\Sigma}] = Di_*[\bar{\Sigma}(t)]$

$$\begin{aligned} \text{Dus: } Di_*[\bar{\Sigma}(t)] &= (j^0 f)^* \pi_*^{-1} Dk_*[\bar{\Sigma}] = (j^0 f)^* P_\Sigma(w_i(TM), w_j(TN)) \\ &= P_\Sigma(w_i(TM), f^* w_j(TN)) \quad \square \end{aligned}$$

De stelling is vrij algemeen, maar geeft geen enkele hint om de polynomen P_Σ in handen te krijgen.

In de volgende § zullen we de klassieke polynomen voor $\Sigma = \Sigma^n$ beschrijven.

De stelling is in verschillende richtingen te generaliseren.

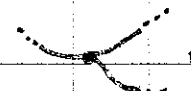
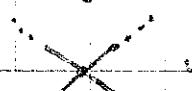
Men kan homologie theorie vervangen door cohomologische theorie (zie Huybrechts [8]). Men krijgt dan dat de cohomologische klasse $[\bar{\Sigma}(t), i] \in N^*(X)$ gegeven wordt

70 door het totale Polyroom P_E gevormd op de z.g. (Linnor-Floyd karakteristieke (coördinaat)klassen.

(Dit is juist $\bar{E}(t)$ een gesloten deelvarieteit van M is).

Een goede richting is om niet naar de fundamentele klasse $[E(t)]$ te kijken, maar om andere 'karakteristieke' homologie elementen van $\bar{E}(t)$ in $H^*(M)$ te bekijken. Daar toe het begrip Euler ruimte (zie [7]).

Definitie: Een ruimte X heet een Euler ruimte

indien X de structuur heeft van een lokaal compact polyhedron, z.d.d. voor elke vertex x de link $L_k(x, X)$ een Euler karakteristiek heeft (Dus:  niet Euler ruimte;  wel.). Dit is precies de noodzakelijke en voldoende voorwaarde op dat

$S_i(X) := \sum (\text{i-cellen in barycentrische onderverdeling})$ den mod 2 gelijk is. Aldus heeft een Euler ruimte dus 'karakteristieke' homologie klassen $S_i(X) \in H_i(X, \mathbb{Z}_2)$

Voor een varieteit X blijkt deze dus ook te zijn van de Stiefel-Whitney klassen van TX (!); $S_i(X) = D^i w_i(TX)$ (van daar de naam (en notatie) Stiefel-Whitney homologie klassen). Er geldt: $S_0(X) \equiv \chi(X) \pmod{2}$ & $S_n(X) = [X] \in H_n(X, \mathbb{Z}_2)$

Sullivan [18] heeft bewezen dat elke reële analytische vermanifold een Euler ruimte is, dus kunnen we in het opzet van afgeleide typen i.k.b. vragen naar $D i_* S_i(\bar{E}(t))$. Het blijkt dat deze klassen ook opgeven worden door universele polynomen (zie Hayden [8]), waar we er een paar van zullen introduceren. (§5.5)

In deze paragraaf zullen we een begin maken met de berekening van de z.g. 1^e orde Thom polynomen, dus de polynomen voor de $\Sigma^i \subset J^1(M, N) = \text{HOM}(\underline{T}_M, \underline{T}_N)$ (zie §3).

Iets algemener kunnen we voor twee (reële of complexe) bundels E en F over een gladde X in $\text{HOM}(E, F)$ de verzameling $\Sigma^i(E, F) = \{(x, \alpha) \in X \times \text{hom}(E_x, F_x) \mid \dim \ker \alpha = i\}$ beschouwen en voor een sectie $L: X \rightarrow \text{HOM}(E, F)$ de verzameling $\Sigma^i(L) := L^{-1}(\Sigma^i) = \{x \in X \mid \dim(\ker L_x) = i\}$ etc.

We doen voor de een voor de volgende constructie met vectorruimten V, W i.p.v. met bundels. Het resultaat is echter direct te 'verbundelen'.

Laat V, W vectorruimten. Beschouw:

$$\begin{array}{ccc} \pi^* V & \xrightarrow{\quad} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{hom}(V, W) & \xrightarrow{\pi} & 0 \end{array}$$

We nemen de i -Grassmannen van $\pi^* V$. Noteer $\gamma_i(\pi^* V)$ met γ_i , $G_i(\pi^* V)$ met G_i en $\pi^* \pi^* W = W$.

Dus:

$$\begin{array}{ccccccc} & \gamma_i W & & \pi^* V & & V & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \text{HOM}(\gamma_i, W) & \xrightarrow{\quad} & G_i & \xrightarrow{p} & \text{hom}(V, W) & \xrightarrow{\pi} & 0 \end{array}$$

In de bundel $\text{HOM}(\gamma_i, W) \rightarrow G_i$ hebben we een kanonieke sectie $\psi: G_i \rightarrow \text{HOM}(\gamma_i, W)$

$$72. \psi: G_i \longrightarrow \text{Hom}(\gamma_i, \mathcal{W})$$

$$(k, A) \in G_i(V) \times \text{Hom}(V, W) \longmapsto A_k: \gamma_i \longrightarrow \mathcal{W}$$

$$(x, k, A) \longmapsto (A_k, k, A)$$

Ita invorden: ψ volgt dan een i -vlak K in V en een homomorfisme $A: V \rightarrow W$ de beperking van A tot K toe.

We definiëren:

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}^i &= \psi^{-1}(0) = \{(k, A) \mid A_k = 0\} = \{(k, A) \mid A_k = 0 \ \forall x \in K\} = \\ &= \{(k, A) \mid \ker A \supset K\} \quad \text{en} \end{aligned}$$

$$\tilde{\Sigma}_0^i = \{(k, A) \mid \ker A = K\}. \quad \text{Mer op: } \tilde{\Sigma}_0^i \text{ ligt dicht in } \tilde{\Sigma}^i \text{ en}$$

is open:

Propositie: 1. ψ is Nulsnede

$$2. \psi(\tilde{\Sigma}^i) = \tilde{\Sigma}^i \subset \text{Hom}(V, W)$$

$$3. \psi(\tilde{\Sigma}_0^i) = \tilde{\Sigma}^i; \psi|_{\tilde{\Sigma}_0^i} \text{ is 1-1 inversie.}$$

(Dus $\tilde{\Sigma}^i \rightarrow \tilde{\Sigma}^i$ is een resolutie)

bewijs: 2 & 3 zijn triviaal. Voor 1: Laat K een i -vlak, $A \in \text{Hom}(V, W)$ met $\ker A \supset K$. We moeten laten zien dat de getranslateerde afgeleide (§ 4.2) van

$$d\psi: T G_i(k, A) \longrightarrow T \text{Hom}(\gamma_i, \mathcal{W}) \quad \psi(k, A) = 0$$

$$\text{a.k.} \quad D\psi: T G_i(k, A) \longrightarrow \text{Hom}(K, W)$$

een surjectie is. Het vanderwijtje voor de verbinding p luidt:

$$0 \longrightarrow T(G_i A)(k, A) \longrightarrow T(G_i)(k, A) \longrightarrow T \text{Hom}(V, W)_A \longrightarrow 0$$

De gebruikelijke identificaties leveren:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(K, V/K) & \xrightarrow{i} & T G_i(k, A) & \longrightarrow & \text{Hom}(V, W) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow D\psi & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & D\psi^i \text{ Hom}(K, V/K) & \longrightarrow & \text{Hom}(K, W) & \longrightarrow & ? \end{array}$$

Mit de definitie van ψ volgt dat met deze identificaties

$$D\psi(i\alpha) = A \circ \alpha \quad ; \quad \alpha \in \text{Hom}(K, V/K)$$

Uit de exacte rijtjes:

73

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{hom}(K, \ker A/K) \rightarrow \text{hom}(K, V/K) \rightarrow \text{hom}(K, \text{Im } A) \rightarrow 0 \\ &\& 0 \rightarrow \text{hom}(K, \text{Im } A) \rightarrow \text{hom}(K, W) \rightarrow \text{hom}(K, \text{coker } A) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

volgt nu dat:

$$\begin{aligned} D\psi &\in \text{hom}(K, V/K) = \text{hom}(K, \text{Im } A) \\ &= \text{hom}(K, \text{coker } A). \end{aligned}$$

Dus het diagram wordt:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{hom}(K, V/K) & \longrightarrow & \text{Tr}(K, A) & \longrightarrow & \text{hom}(V, W) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow D\psi & & \downarrow \alpha \\ 0 & \longrightarrow & \text{hom}(K, \text{Im } A) & \longrightarrow & \text{hom}(K, W) & \longrightarrow & \text{hom}(K, \text{coker } A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

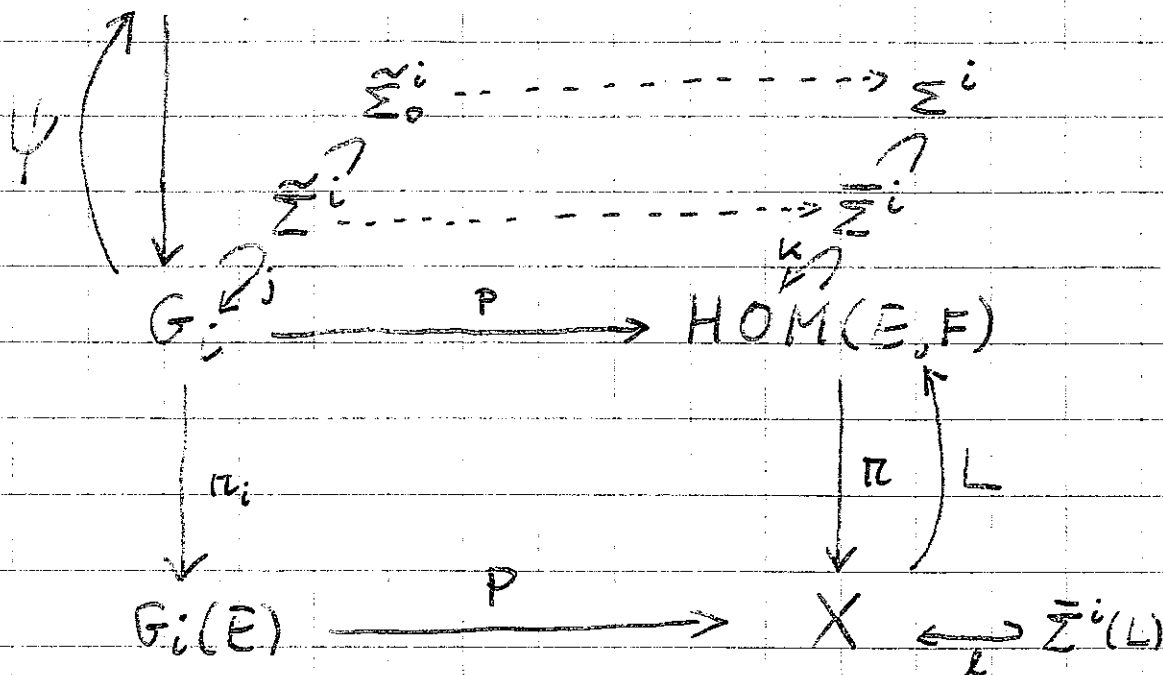
De afbeelding α is $(\alpha: V \rightarrow W) \mapsto (\pi_{\text{Im } A} \circ \alpha|_K: K \rightarrow \text{coker } A)$
dus surjectief. Er volgt dat $D\psi$ surjectief is

□

Omdat het bewijs en de constructie helemaal niet
natuurlijk zijn, is bovenstaande propositie te
verbonden naar de situatie waarin V & W ver-
vangen worden door bundels E en F over een ruimte
 X .

We hebben dan het volgende belangrijke
diagram:

74. $\text{HOM}(\gamma_i, E)$



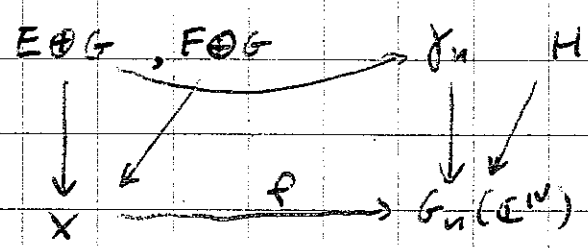
Hierin is: $G_i = G_i(\pi^* E)$; $\gamma_i = \gamma_i(\pi^* E)$; $F = p^* \pi^* F$
 $\tilde{\Sigma}^i = \psi^{-1}(0)$. Aangezien we $\tilde{\Sigma}^i$ gerepresenteerd hebben
als transversale snijding van ψ met de nulsectie hebben we
nu: $Dj_*[\tilde{\Sigma}^i] = e(\text{HOM}(\gamma_i, \pi^* F))$ met e de Eulerklasse.
Met algemene eigenschap van de fundamentele klasse (zie [2])
geldt: $p_* j_*[\tilde{\Sigma}^i] = k_*[\tilde{\Sigma}^i]$, dus $Dp_* D^{-1} Dj_*[\tilde{\Sigma}^i] =$
 $Dk_*[\tilde{\Sigma}^i]$. Voor een sectie L type transversaal op Σ^i (i.h.b.a
 $L \cap \text{alle } \Sigma^k$) hebben we $Dl_*[\tilde{\Sigma}^i(L)] = L^* Dk_*[\tilde{\Sigma}^i]$
Aangezien $KL = \text{id}_X$ en π^* iso volgt nu uit de commutativiteit
van het diagram: $Dl_*[\tilde{\Sigma}^i(L)] = P_!(e(\text{HOM}(\gamma_i(\pi^* E), \pi^* F)))$
met $P_! = Dp_* D^{-1}$ het Gysin-homomorfisme.
De berekening van de duale klasse van $[\tilde{\Sigma}^i]$ is hiermee
afgeleidend tot het berekenen van een heel speciaal
Gysin-homomorfisme. Bij de berekening daarvan is
de volgende opmerking van belang.

bewering: de Thom strata Σ^i zijn 'suspensie-stabiel'.
 d.w.z. $S^{-1}(\Sigma^i(E \oplus G, F \oplus G)) = \Sigma^i(E, F)$ en het zelfde voor
 de afsluitingen. Hierin is $S: \text{HOM}(E, F) \rightarrow \text{HOM}(E \oplus G, F \oplus G)$
 de 'suspensie afbeelding' $S: \alpha \mapsto \alpha \oplus 1_G$

bewijs: triviaal.

Een dergelijke eigenschap heeft het volgende effect op de
 Thom polynomen.

Laat n.l. G een bundel over X z.d.d. $F \oplus G$ triviaal is (F
 van eindig type). We werken verder met complexe bundels en
 Chern klassen. Laat $f: X \rightarrow G_n(\mathbb{C}^N)$ klassificeren de af-
 beelding voor de bundel $E \oplus G$



met H triviale bundel over G_n met zelfde rang als $F \oplus G$.
 Precies als in het bewijs van de algemene Thom polynoom-
 stelling volgt nu dat de duale klasse van $\bar{\Sigma}^i(\gamma_n, H)$
 uitgedrukt kan worden als een polynoom $q_i(c)$ in de
 Chern klassen c van γ_n . Terug treden leert dan dat de
 duale klasse van $\bar{\Sigma}^i(E \oplus G, F \oplus G)$ (opgevat in $H^*(X)$) gelijk
 wordt door $q_i(c(E \oplus G)) = q_i(c(E - F))$ waar bij $E - F$
 de eventueel 'virtuele bundel' in $K(X)$ is. Uit de
 suspensie eigenschap volgt nu dat de duale klasse van
 $\bar{\Sigma}^i(E, F)$ in $H^*(X)$ gelijk wordt door dit zelfde polynoom
 in de Chernklassen van de virtuele verschild bundel.

Dus: $q_i(c(E - F)) = P_i(e(\text{HOM}(\gamma_i(\mathbb{C}^N), \mathbb{C}^N))) = D_{e*}[\bar{\Sigma}^i(L)]$.

Een dergelijke stabiliteits eigenschap geldt ook voor de

65.3. Berekening van het Gysin-homomorfisme $P_!$

We herhalen het in §4.5. vermeldde resultaat dat de cohomologische ring van een geassocieerde k -vectorsbundel van een rang n bundel over X

$$\begin{array}{ccc} \gamma_n(E) & & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_n(E) & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

isomorf is met $H^*(X)[Y_1, \dots, Y_n]/I_{n,k}$

waarbij het isomorfisme gegeven wordt door

$$f: H^*(X)[Y_1, \dots, Y_n]/I_{n,k} \longrightarrow H^*(G_n(E))$$

$$a \cdot Y_i \longmapsto p^*a \cup c_i(\gamma_n(E))$$

en het ideaal $I_{n,k} = (Y_{n-k+1}, \dots, Y_n)$

waarbij de Y_i gedefinieerd worden door de relaties

$$\sum_{h=0}^k \gamma_h \cdot \gamma_{i-h} = c_i(E)$$

Modulo het ideaal kunnen we Y_i dus opvatten als de i -de Chern-klasse van $\gamma_n(E)$ en Y_i als de i -de Chern-klasse van de kanonieke normaalbundel van $\gamma_n(E)$ in $p^*(E)$.

Het Gysin-homomorfisme is gedefinieerd:

$$P_!: H^i(G_n(E)) \longrightarrow H^{i-2k(n-k)}(X)$$

(n.b. de rechte complex).

De kern van $P_!$ is isomorf met $G_n(\mathbb{A}^{n-k})$.

propositie: Laat $s_1, \dots, s_n$ een rijtje van k getallen

77.

Dan:

$$P!(Y_{s_1}, \dots, Y_{s_k}) = \begin{cases} 1 & \text{als } s_1 = s_2 = \dots = s_k = n-k \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

bewijs: 1) Als er een l is z.d.d. $s_l \geq n-k+1$ dan $Y_{s_l} = 0$

Dit beperkt de gevallen tot $s_l \leq n-k \quad \forall l$.

2) Als er een l is z.d.d. $s_l < n-k$ dan, op grond van de grondverlaging, van het G_Y -invariantie $P!(Y_{s_1}, \dots, Y_{s_k}) = 0$.

3). Blijft over het geval $s_1 = s_2 = \dots = s_k = n-k$, ofwel:

$$P!(Y_{n-k}^k)$$

Laat $j_*: G_n(E_X) \rightarrow G_k(E)$ de inclusie van een versch.

De restrictie $j_*^* Y_{n-k}^k$ is gelijk aan $\bar{c}_{n-k}^k \in H^{2k(n-k)}(G_n(E_X))$

(met $c = c(X \times X)$ de Thom bundel op $G_n(E_X)$). We laten zien

dat de duale homologie klasse gerepresenteerd wordt door één punt.

Laat $a \in G_n(E_X)$. Definier $\varphi_a: G_n(E_X) \rightarrow \text{HOM}(a, E_X/X \times X)$,

door $\varphi_a: b \in G_n(E_X) \mapsto \pi_b|_a$ met π_b de

projectie langs b . Er geldt $\varphi_a^{-1}(0) = a$ en de sectie

is transversaal. Gevolg: $D[a] = e(\text{HOM}(a, E_X/X \times X)) =$

$$= \bar{c}_{n-k}^k.$$

In elke versch $G_n(E_X)$ representeert $D^{-1} \bar{c}_{n-k}^k$ één punt, dus

$$P_* D^{-1} Y_{n-k}^k = [x] \text{ waaruit volgt: } P! Y_{n-k}^k = 1 \in H^0(X) \cong \mathbb{R}$$

Gevolg: Noteer $x_l = c_l(E)$ en inverse klassen van

Y_l en X_l valt $\bar{Y}_l, \bar{X}_l$.

$$\text{Er geldt: } P!(\bar{Y}_{s_1}, \dots, \bar{Y}_{s_k}) = \bar{x}_{s'_1} \dots x_{s'_k} \quad s'_l = s_l - n + k$$

78. Deze formule geeft dus het beeld onder $P_!$ van elk product van k inverse Chernklassen van de kanonieke bundel $\gamma_k(E)$ in termen van de inverse Chernklassen van E .

bewijs: Het is de kanonieke rijtje over $\gamma_k(E)$:

$$0 \rightarrow \gamma_k(E) \rightarrow P^*E \rightarrow \gamma_{k-1}(E) \rightarrow 0$$

volgt door Chernklasse nemen:

$$\bar{\gamma}_k = \sum_{i=0}^k P^*(\bar{x}_i) \cdot \bar{\gamma}_{k-i}$$

Door product van k van deze termen te nemen:

$$\bar{\gamma}_{s_1} \dots \bar{\gamma}_{s_k} = P^*(\bar{x}_{s_1} \dots \bar{x}_{s_k}) \cdot \bar{\gamma}_{n-k} + \text{termen met } \bar{\gamma}_{n-k}$$

Uit de formule $P_!(P^*(x) \cdot y) = x \cdot P_!y$ volgt men, in combinatie met de lemming het opstelde $\square$

Om nu het complete Gysin homomorfisme in handen te krijgen gebruikt men een truc met z.g. isobare determinanten om een willekeurig monoom in de γ_k te schrijven als lineaire combinatie van monomen in $\bar{\gamma}$ van graad k .

Laat $s = (s_1, \dots, s_m)$ een willekeurig rijtje van niet-negatieve getallen ≥ 0

Noem met $Q_s(c)$ de volgende determinant:

$$Q_s(c) = \begin{vmatrix} c_{s_1} & c_{s_1-1} & c_{s_1-2} & \dots & \dots \\ c_{s_2+1} & c_{s_2} & c_{s_2-1} & \dots & \dots \\ c_{s_3+2} & c_{s_3+1} & c_{s_3} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & c_{s_M} \end{vmatrix}$$

Dus: als $s = (1 \ 1 \ 2)$ dan $Q_s(c) = \begin{vmatrix} c_1 & c_0 & c_{-1} \\ c_2 & c_1 & c_0 \\ c_4 & c_3 & c_2 \end{vmatrix}$

We zetten $c_0 = 1$ & $c_{-k} = 0$; $Q_s(c) = \begin{vmatrix} c_1 & 1 & 0 \\ c_2 & c_1 & 1 \\ c_4 & c_3 & c_2 \end{vmatrix}$

Vorm het 'aantallen' en 'incrementen' rijtje bij s ; Noem deze u resp v .

Dus als $s = (1 \ 1 \ 2)$ dan $u = (2 \ 1)$ en $v = (1 \ 1)$

of $s = (1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4)$ dan $u = (2 \ 2 \ 2 \ 2)$, $v = (1 \ 1 \ 1 \ 1)$

(De formules opschrijven die het verband tussen s en (u, v) geven is weinig zinnig, zie Ronga [16])

Bij elke incrementen en aantallen rijtje horen duale rijtjes $\bar{u}$ en $\bar{v}$ die ontstaan door de van rechts naar links +1 (eren)

Dus $u = (1 \ 1 \ 3 \ 2) \rightarrow \bar{u} = (2 \ 3 \ 1 \ 1)$ etc.

Verwissel nu de rol van $\bar{u}$ en $\bar{v}$ en construeer aldus het duale rijtje $\bar{s}$

Voorbeeld:

$$s = (1 \ 3 \ 4 \ 4 \ 5 \ 5) \Rightarrow \begin{matrix} v = (1 \ 2 \ 1 \ 1) \\ u = (1 \ 1 \ 3 \ 2) \end{matrix} \begin{matrix} \nearrow \bar{u} = (2 \ 3 \ 1 \ 1) \\ \searrow \bar{v} = (1 \ 1 \ 2 \ 1) \end{matrix} \Rightarrow \bar{s} = (2 \ 5 \ 6 \ 6 \ 7)$$

80 propositie: $Q_S(C) = (-1)^{\varepsilon} Q_{\bar{S}}(\bar{C})$

het $\varepsilon = u_1 v_1 + (u_1 + u_2) v_2 + \dots + (\sum u_k) v_n$

Bewijs: Dit is het gevolg van de speciale structuur van de determinante in de relatie tussen de variabelen C_i en $\bar{C}_i$. Het is een gure formule identiteit en geldt elke permutatie $\sigma \in S_n$. Voor een bewijs zie Remp [1.6]

Voorbeeld: $s = (1\ 2)$; $\begin{matrix} v=1 \\ u=2 \end{matrix} \begin{matrix} \nearrow \bar{u}=2 \\ \searrow \bar{v}=1 \end{matrix} \Rightarrow \bar{s} = (2)$

dus: $\begin{vmatrix} c_1 & 1 \\ c_2 & c_1 \end{vmatrix} = \bar{c}_2$ hetgeen klopt met §4.5.

Analogie: $s = (1 \dots k)$; $\begin{matrix} v=1 \\ u=k \end{matrix} \begin{matrix} \nearrow \bar{u}=k \\ \searrow \bar{v}=1 \end{matrix} \Rightarrow \bar{s} = k$

dus: $\begin{vmatrix} c_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & c_1 & 1 & & \\ c_3 & c_2 & c_1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ c_k & \dots & \dots & c_1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^k \cdot \bar{c}_k$

Minder triviaal: $s = (1\ 2)$ $\Rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} \nearrow 1 & 2 \\ \searrow 1 & 1 \end{matrix} \Rightarrow \bar{s} = (1\ 3)$

dus: $\begin{vmatrix} c_1 & 1 & 0 \\ c_2 & c_1 & 1 \\ c_4 & c_3 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{c}_1 & 1 \\ \bar{c}_4 & \bar{c}_3 \end{vmatrix}$ et cetera.

Het grote uit van deze merkwaardige dualiteit tussen determinanten is, dat bij de overgang van het rijtje s naar $\bar{s}$ 'aantallen' en 'grootste term' verwisseld worden en klassen in inverse klassen.

worden omgezet. Dit levert een efficiënt algoritme^{Bl.} ter berekening van het Gysin-homomorfisme $P_!$

Het recept is:

- 1) Laat $y_{s_1} \dots y_{s_M}$ een monoom in de y_l . Omdat $y_l = 0$ als $l > k$ hoeven we alleen te kijken naar monomen met $s_j \leq k$.

Schrijf nu $y_{s_1} \dots y_{s_M}$ als lineaire combinatie van Q_s -determinanten. Dit kan altijd. (de Q_s vormen een basis voor de monomen), en is vaak eenvoudiger.

Zo is bijv.: $y_k \dots y_k = Q_s(y)$ met $s = (k, \dots, k)$, maar omdat $y_l = 0$ voor $l > k$.

- 2) Zet m.b.v. de transformatie $s \rightarrow \bar{s}$ elke $Q_s(y)$ determinant om in een $Q_{\bar{s}}(\bar{y})$ determinant. Het aantal termen in $\bar{s}$ is steeds $\leq k$.

- 3) Voor zo'n $Q_t(\bar{y})$ is het beeld onder het Gysin-homomorfisme eenvoudig: $t = (t_1, \dots, t_k)$

$$\boxed{P_! Q_t(\bar{y}) = Q_{t'}(\bar{x})} \quad \text{met } t' = (t_1 - n + k, \dots, t_k - n + k)$$

omdat zo'n determinant een lineaire combinatie is van rijtjes in de $\bar{y}$ van lengte k .

- 4) Transformeer de laatste terug naar determinanten $Q_{\bar{s}}(\bar{x})$ over k lezer.

§ 5.4. Laatste stap.

We berekenen nu het Thom polynoom van Σ^i expliciet: $q_i(C(E-F)) = P_!(e(\text{Hom}(\chi_i(E), p^*F)))$

82. Om te zien dat de rank van de vkt. P alleen van de rang van E afhangt, kan men de vkt. P voor alle E in een vaste situatie kiezen. $X = \mathcal{O}_n(\mathbb{C}^n)$, $E = \mathcal{O}_n$, $F = \mathcal{O}^k$ (triviale bundel v. rang k)

$$\begin{array}{ccc} \pi_i(\mathcal{O}_n) & \mathcal{O}^k & \mathcal{O}_n & \mathcal{O}^k \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow \\ \mathcal{O}_i(\mathcal{O}_n) & \xrightarrow{P} & \mathcal{O}_n(\mathbb{C}^n) & \end{array}$$

We hebben: $e(\text{HOM}(\pi_i(\mathcal{O}_n), \mathcal{O}^k)) = e(\text{HOM}(\pi_i(\mathcal{O}_n), \mathcal{O}^1))^k$
 $= (-1)^{i \cdot k} \cdot y_i^k$ met $y_i = c_i(\pi_i(\mathcal{O}_n))$

Nu is $y_i^k = \tilde{Q}_s(y)$ met $s = (\underbrace{i, i, \dots, i}_k)$

Transformeren: $(-1)^{i \cdot k} \cdot \tilde{Q}_s(y) = Q_{\tilde{s}}(\tilde{y})$ met $\tilde{s} = (\underbrace{k, \dots, k}_i)$

Isomorfismen: $P! Q_{\tilde{s}}(\tilde{y}) = Q_{\tilde{e}}(\tilde{x})$ met $\tilde{e} = (\underbrace{k-n+i, \dots, k-n+i}_i)$
 en $\tilde{x}_i = c_i(\mathcal{O}_n)$

Permuteren: $Q_{\tilde{e}}(\tilde{x}) = \tilde{Q}_e(x)$ met $e = (\underbrace{i, \dots, i}_{k-n+i})$
 en $x_i = c_i(\mathcal{O}_n)$

Met andere woorden:

$$q_i(c(E-F)) = (-1)^{i(n-k+i)} \cdot \left(\begin{array}{c} c_i \quad c_{i-1} \quad \dots \quad c_1 \\ c_{i+2} \quad c_i \\ \vdots \\ c_i \end{array} \right) \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c} c_i \quad c_{i-1} \quad \dots \quad c_1 \\ c_{i+2} \quad c_i \\ \vdots \\ c_i \end{array}} \right\} k-n+i$$

met $c_i = c_i(E-F)$

$k = \text{rank}(F)$; $n = \text{rank}(E)$.

Dit is de beroemde formule van Porteous [15] voor de tweede klasse $D L_* [\bar{S}^i] \in H^{i(n-m)}(X, \mathbb{Z})$ voor een (type) transversale sectie $L: X \rightarrow \text{Hom}(E, F)$ met E en F complexe bundels over X in termen van de Chern klassen van de verschil bundel $E - F$.

Voor reële bundels is natuurlijk alles anders: vervang Chern klassen door Stiefel-Whitney klassen en coëfficiënten in $\mathbb{Z}_2$ door coëfficiënten in $\mathbb{Z}_2$.

Voor een afbeelding $f: M \rightarrow N$; $f \in \Sigma^n$ te vinden met $m = (\dim M = m, \dim N = n)$.

$$D L_* [\bar{S}^i(f)] = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_{n-m+1} \\ w_{m+1} & w_m & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & w_m \end{vmatrix} \begin{matrix} n-m+i \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \quad w_i = w_i(TM - f^*TN)$$

Als $m \geq n$ dan $\sum^{m-n+j} = S^j$

$D L_* [\bar{S}^i(f)] = w_{m-n+1}(TM - f^*TN)$

(I)

Als $m \leq n$ dan $\sum^{-i} = S^i$

$D L_* [\bar{S}^i(f)] = \bar{w}_{n-m+1}(TM - f^*TN)$

(II)

Ter afsluiting van deze paragraaf nog enkele opmerkingen:

- 84 1). Zoals al gezegd, gaan formules I en II terug op
Thom [17].
- 2). De algemene formule is afkomstig van Porteous [15]; de
zijn echter sterk verwant met bekende formules uit
de Schubert calculus (Giambelli's determinant).
- 3). De hier geverde behandeling is afkomstig op
Berga [16], maar is hoofdzakelijk uitgaande als Porteous [15].
- 4). Berga [16] behandelt ook Thom polynomen voor de
2e orde Σ^2 . Er is echter, voor wat ik weet, geen
andere formule voorhanden.
- 5). De Thom polynomen voor $\Sigma^{1,1,1,\dots,1}$ zijn niet gevonden
(zie [15]).
- 6). Het probleem bij het berekenen van de hogere orde
Thom polynomen komt eigenlijk weer op het vinden
van resoluties voor Σ^I en het opschrijven van de
normaal bundel. De rest is rekenen; de afgeleide
termen door allerlei symmetrische functies te vullen.
- 7). Er zijn ook polynomen voor contact klassen uit-
gezonderd (Demazure [4]). Helaas weet ik hier niets
van; ik kan niet beschikken over het benodigde materiaal.
- 8). Een Merzinger blijft resoluties voor 3e orde gladde
en waarschijnlijk voor alle ordes.
- 9). De relevantie van de hogere orde Thom polynomen
allant met toenemende orde zien af omdat de
codimensie van Σ^I zo snel omlaag gaat. De poly-
nomen hebben waarschijnlijk een voorstel van veel
termen.

5.5. Enkele toepassingen.

* Laat $f: \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ $n \geq 2$; $f \notin \Sigma^i$

Dan hebben we $D_*[\bar{S}^i(f)] = w_{n-1}(T\mathbb{R}P^n)$

volgens formule (I).

Aan gezien $w_n(\mathbb{R}P^n) = \binom{n+1}{n} x^n$ (zie § 4.5)

volgt: $D_*[\bar{S}^i(f)] = \binom{n+1}{2} x^{n-1}$

Er volgt nu een voorstelling:

$$D_*[\bar{S}^i(f)] = 0 \quad \begin{array}{l} n = 1 \text{ of } 2 \text{ mod } 4 \\ \neq 0 \quad n = 0 \text{ of } 3 \text{ mod } 4. \end{array}$$

I.k.b. is dus de ijde van de kritische verzameling in $\mathbb{R}P^2$ ongeëgde van nult.

J.k.u.: $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dan $D_*[\bar{S}^i(f)] = w_i(TM)$

dus is alleen afhankelijk van de oriënteerbaarheid van M .

* Laat Σ een type z.d.d. voor bepaalde dimensies n en k $[\bar{S}^i(f)]$ geïmpresenteerd wordt door een linnig aantal punten ($f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, M compact). Dan geldt:

$\# \bar{S}^i(f) \text{ mod } 2 = \langle P_\Sigma(w(TM)), [M] \rangle$ met P_Σ , het Thom polynoom, een lineaire combinatie van monomen $w = \prod w_i(T\mathbb{R}P^i)$ van graad n . J.k.b. is dus $\# \bar{S}^i(f) \text{ mod } 2$ een bordisme invariant van M .

In § 1. kunnen we af lezen $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^n$: $\# \bar{S}^i(f) \equiv \chi(M) \text{ mod } 2$

§ 2. $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^2$: $\# \bar{S}_{1,1}(f) \equiv \chi(M) \text{ mod } 2$

Vraag: kan we collectie 'bordisme detectore' $\{\Sigma\}$ vinden z.d.d. de $\{P_\Sigma\}$ een basis voor de invariants van

86. vraag en antwoord?

* De stelling van §2 legt een verband tussen een reële invariant van M ($\chi(M)$) en een reële karakteristieke klasse en de discriminant (het windingsgetal). De vraag is of dit te generaliseren is voor afbeeldingen $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $n \geq k$.

Als ze gelineariseerd zijn in 'integrale' variabelen (dus, voor een variabelen mod 2), dan lijkt het volgende te luiden: 1) Voor windingsgetal van de discriminant: $\mathbb{R}P^{k-1}$ uit te bouwen, dus k even.

2). De kwadratische vorm $\bar{S}^1(f)$ moet een $\mathbb{Z}$ -karakteristieke klasse opleveren. (In geval $k=2$ was dit gheen mogelijk: $\bar{S}^1(f)$ was gewoon een collectie cirkels, dus niet uit te bouwen.)

3). Er moet een 'locale omringing conditie' voldaan zijn. In geval $k=2$ betekende dit dat $M = \mathbb{R}P^2$.

We zullen nu op twee verschillende manieren laten zien dat niet altijd een conditie 2) voldaan hoeft te zijn.

A. Laat M een gladde variëteit en S een gladde deelvariëteit van codimensie d . Laat $i: S \hookrightarrow M$.

$$\text{Laat } M \xrightarrow{s} S \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} (M, M-S)$$

De bereik de bijbehorende exacte sequentie is rij:

$$\dots \rightarrow H^*(M, M-S) \xrightarrow{j^*} H^*(M) \xrightarrow{k^*} H^*(M-S) \xrightarrow{\delta} H^{*+1}(M, M-S) \rightarrow \dots$$

Laat $\text{exc}: (T, T-S) \rightarrow (M, M-S)$ de uitsluiting voor een tubulaire omgeving van S . en $\text{exc}^*: H^*(M, M-S) \xrightarrow{\sim} H^*(T, T-S)$ het uitsluitingsisomorfisme.

Laat $\psi: \mathbb{R}(T, T-S) \xrightarrow{\sim} (E, E_0)$ homeomorfisme van de tubulaire omgeving naar de normaal bundel van S in M

Laat $\phi: H^{*-d}(S) \rightarrow H^*(E, E_0)$ het Thom isomorfisme
 $a \mapsto p^*a \cup \eta$

(§4.5) valt $p: \Xi \rightarrow S$ de projectie

Bij elkaar komt dit een afbeelding

$$\rightarrow H^*(M, M-S) \xrightarrow{j^*} H^*(M) \xrightarrow{k^*} \dots$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \text{exc}^* \\ H^*(T, T-S) \\ \uparrow \psi^* \\ H^*(E, E_0) \\ \uparrow \phi \\ H^{*-d}(S) \end{array}$$

$$j^* \text{exc}^* \psi^* \phi: H^{*-d}(S) \rightarrow H^*(M)$$

Het is bekend dat deze samen-
 gestelde afbeelding overeen komt
 met het Gysin homomorfisme

$$i!: H^{*-d}(S) \rightarrow H^*(M); i! = D i_* D^{-1}$$

Dus: $i! = j^* (\text{exc}^*)^{-1} \psi^* \phi$

We zijn nu geïnteresseerd in $i! w_1(TS)$. Als dit
 element $\neq 0$ dan is S zeker niet orienteerbaar.

Er geldt: $TS \oplus \Xi = i^* TM$

waaruit volgt: $w_1(TS) = w_1(E) + i^* w_1(TM)$

dus: $i! w_1(TS) = i! w_1(E) + i! i^* w_1(TM)$

88 Echter, volgens Thom's definitie van de GW-klasse

$$\text{gwa: } w_k(E) = \phi^{-1} Sq^k u_E \quad (\text{zie § 4.5})$$

$$\text{dus: } i! w_1(E) = i! \phi^{-1} Sq^1 u_E$$

$$= j^* \alpha \circ \phi^{-1} \cdot \psi^* \phi \phi^{-1} Sq^1 u_E$$

$$= j^* \alpha \circ \phi^{-1} \cdot \psi^* Sq^1 u_E = Sq^1 j^* \alpha \circ \phi^{-1} \cdot \psi^* \phi \phi^{-1} u_E$$

$$= Sq^1 (i! w_0(E)) = Sq^1 (i! 1).$$

$$\text{Vervol: } i! i^* w_1(TM) = w_1(TM) \cdot i! 1$$

$$\text{Dus: } i! w_1(TS) = w_1(TM) \cdot i! 1 + Sq^1 (i! 1)$$

Merken op: $i! 1 = D \bar{c}_* D^{-1} D[1] = D \bar{c}_* [1]$, de duale
basis van S .

Het element $i! w_1(TS)$ wordt dus gegeven door een
vairabele operatie $(w_1(TM) + Sq^1)$ op de duale basis
van S toe te passen.

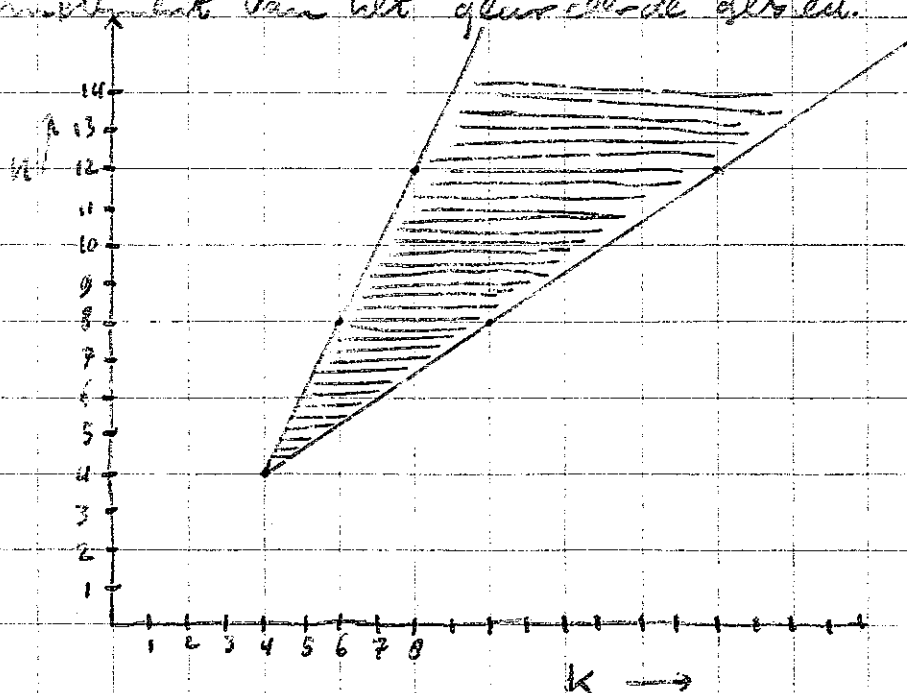
Laat nu $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ en de dimensies n & k

zich. de geveride $\Sigma(f) = S_1(f) = \bar{S}_1(f)$ een gladde

variëteit is. Dit geldt op als codim $S_2(f) > n$ (overal)

overeenkomstig in diagram: als $(n, k) \in P$ waarbij P

het complement van het geveride gebied.



Dus: $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^k$; $(n, k) \in \mathcal{P}$. Dan is 89.

$\Sigma(f) = S_1(f) = \bar{S}_1(f)$ gelijkv. glad.

Laat nu $S = S_1(f)$ en stel even $n \geq k$.

Dan weten we: $Di_*[S] = w_{n-k+1}(TM)$ (formule I).

Passen we nu het bovenstaande resultaat toe, dan:

$$\begin{aligned} i! w_1(TS) &= (w_1(TM) + Sq^1)(w_{n-k+1}(TM)) \\ &= w_1(TM) \cdot w_{n-k+1}(TM) + Sq^1(w_{n-k+1}(TM)). \end{aligned}$$

Voor de actie van de Steenrod squares op de S-W klassen van ^{een} ~~aan~~ ~~over~~ ~~de~~ bundel bestaat de z.g. formule van Wu: (zie [10])

$$Sq^k w_l = \sum_{r=0}^k \binom{l+r-k+1}{r} w_{k-r} w_{l+r}$$

$$\text{dus: } Sq^1 w_l = w_1 \cdot w_l + \binom{l+1}{1} w_{l+1}$$

$$\text{waardoor volgt: } i! w_1(TS) = (n-k) w_{n-k+2}(TM) \quad n \geq k$$

Voor $k \geq n$ vinden we analoge:

$$i! w_1(TS) = (n-k) \cdot \bar{w}_{k-n+2}(TM) \quad k \geq n.$$

Voorbeeld: $f: \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad n \geq 3$

Als $n \equiv 2 \pmod{4}$; dan is $S_1(f)$ niet orienteerbaar!

Merkt op $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^2$; $i! w_1(TS) = n \cdot w_1 = 0$ dus dat klopt mooi.

90 B. wanneer we met bovengesemde methode ook $i_! w_2(TS)$, $i_! w_3(TS)$ etc willen berekenen kunnen we in de problemen.

De volgende methode is dan toepasbaar:

Laat $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $(n, k) \in \mathcal{P}$ en f generiek

$$Zet \quad j = n - k + 1 \text{ als } n > k \\ = 1 \quad \text{als } n \leq k$$

Dan $S_1(f) = \{x \in M^n \mid \dim \ker df_x = j\}$.

Beschouw het diagram:

$$\begin{array}{ccccc} & & \gamma_j(TM), \mathbb{E}^k & & TM, \mathbb{E}^k \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ HOM(\gamma_j, \mathbb{E}^k) & \xrightarrow{\quad} & G_j(TM) & \xrightarrow{\quad \pi^k \quad} & M \end{array}$$

$\psi \swarrow$

$$\psi \text{ is de sectie } G_j(TM) \rightarrow HOM(\gamma_j(TM), \mathbb{E}^k) \\ (x, k) \mapsto dx|_k: k \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$\psi^{-1}(0) = \tilde{\Sigma}^j$ is glad en $\pi|_{\tilde{\Sigma}^j} \rightarrow S_1(f)$ is een isomorfisme. De gedefinieerde afgeleide $D\psi$ identificeert de normaalbundel van $\tilde{\Sigma}^j =: \tilde{S}$ met $HOM(\gamma_j(TM), \mathbb{E}^k)$

Laat $j: S \rightarrow G_j(TM)$ de inclusie

Dan hebben we: $TS \oplus j^* HOM(\gamma_j, \mathbb{E}^k) = j^* T G_j(TM)$

$$\text{ofwel formid: } TS = j^* T G_j(TM) - j^* HOM(\gamma_j, \mathbb{E}^k)$$

Voor de raakbundel aan $G_j(TM)$ hebben we het raak $\pi^*_{G_j} + j_*$:

$$0 \rightarrow \ker(d\pi) \rightarrow T G_j(TM) \rightarrow \pi^* TM \rightarrow 0$$

$\ker(d\pi)$ is de bundel van raakbundels aan de wereld.

De wereld boven $x \in M$ is $G_j(TM_x)$, dus $T G_j(TM_x) =$

$$HOM(\gamma_j(x), TM_x) = HOM(\gamma_j(x), \gamma_j(x)) \text{ met } \gamma_j(x) \text{ de}$$

kanonieke bundel $\gamma_j(TM)$ bestaat tot TM_x

9!

Dit levert $\ker d\pi = \text{HOM}(\gamma_j(TM), \pi^*TM) = \text{HOM}(\gamma_j(TM), \gamma_j(TM))$

In volle:

$$TS = j^* \left[\pi^*TM + \text{HOM}(\gamma_j(TM), \pi^*TM) - \text{HOM}(\gamma_j(TM), \gamma_j(TM)) - \text{HOM}(\gamma_j(TM), \mathbb{R}^k) \right]$$

Aangetzien $i: S \hookrightarrow M$ gelijk is aan π_j hebben we:

$i! = \pi! j!$, dus:

$$\begin{aligned} i! w(TS) &= \pi! j! \left[j^* (\pi^* w(TM) \cdot w(\text{HOM}(\gamma_j(TM), \pi^*TM)) \right. \\ &\quad \left. \cdot \bar{w}(\text{HOM}(\gamma_j, \gamma_j)) \cdot \bar{w}(\text{HOM}(\gamma_j, \mathbb{R}^k)) \right] \\ &= \pi! [A] \cdot j! 1 \end{aligned}$$

met $A = \pi^* w(TM) \cdot w(\text{HOM}(\gamma_j, \pi^*TM)) \cdot \bar{w}(\text{HOM}(\gamma_j, \gamma_j)) \cdot \bar{w}(\text{HOM}(\gamma_j, \mathbb{R}^k))$

$j! 1 =$ duale klasse van $\tilde{S}$ in $G_j(TM)$

$$= \gamma_j^k \quad \gamma_k = w_k(\gamma_j(TM)) \quad (\text{zie §5.4})$$

Het probleem v.b. berekening van $i! w(TS)$ is van dus gereduceerd tot het berekening v.b. γ_j sin homomorfisme $\pi!$ op het element $A \cdot \gamma_j^k$. Door A in de γ_k uit te schrijven kan het Ronga algoritme toe te passen krijgen v.b. de formule in de $w_k(TM)$.

Voorbeeld: $i! w_1(TS) =$

$$= \pi! \left[\left\{ \pi^* w_1(TM) + w_1(\text{HOM}(\gamma_j, \pi^*TM)) + w_1(\text{HOM}(\gamma_j, \gamma_j)) + w_1(\text{HOM}(\gamma_j, \mathbb{R}^k)) \right\} \cdot \gamma_j^k \right]$$

Lemma: $w_1 \text{HOM}(E, F) = \text{rang } F \cdot w_1(E) + \text{rang } E \cdot w_1(F)$

bewijs: gederive split principe. $\square$

$$\begin{aligned} \text{Dus: } i! w_1(TS) &= w_1(TM) \cdot \pi! \gamma_j^k + \pi! ((n \cdot \gamma_1 + j \cdot \pi^* w_1(TM) + k \cdot \gamma_1) \gamma_j^k) \\ &= (1+j) w_1(TM) \cdot \pi! \gamma_j^k + \pi! (n-k) \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_j^k \end{aligned}$$

$\pi! \gamma_j^k$ is met onze bijl. het opname Thom-polynoom.

g2. het element $y_1 y_j^k$ is gelijk aan $Q_s(y)$ met

$$s = (1, \underbrace{j, j, \dots, j}_k)$$

$$s = (1, \underbrace{j, j, \dots, j}_k) \Rightarrow \begin{matrix} 1 & j-1 & & k & 1 \\ 1 & k & \searrow & j-1 & 1 \end{matrix} \Rightarrow \underbrace{(k, k, \dots, k)_{j-1}}_{j-1} = \bar{s}$$

$$Q_s(y) = Q_{\bar{s}}(\bar{y}) \quad ; \quad n! Q_{\bar{s}}(\bar{y}) = Q_{\bar{t}}(\bar{x}) \quad \text{met}$$

$$\bar{t} = (\underbrace{k-n+j, \dots, k-n+j}_{j-1}) \quad \text{Terug transformeren:}$$

$$Q_{\bar{t}}(\bar{x}) = Q_t(x) \quad \text{met } t = (1, \underbrace{j, j, \dots, j}_{k-n+j})$$

$$Q_t(x) = \left\{ \begin{matrix} w_1 & 1 & 0 & \dots \\ w_{j+1} & w_j & & \\ \vdots & & w_i & \\ \vdots & & & \ddots & w_i \end{matrix} \right\}_{k-n+j}$$

Als $n \geq k$ dan $j = n-k+1$ dus $Q_t(x) = w_1 w_{n-k+1} + w_{n-k+2}$

als $n \leq k$ dan $j=1$ dus $Q_t(x) = \bar{w}_{n-k+2}$

$$\begin{aligned} i! w_2(TS) &= (n-k+1+1) w_1 w_{n-k+1} + (n-k) [w_1 w_{n-k+1} + w_{n-k+2}] \\ &= (n-k) w_{n-k+2} \quad \text{als } n \geq k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i! w_2(TS) &= (1+1) w_1 \bar{w}_{n-k+1} + (n-k) \bar{w}_{n-k+2} \\ &= (n-k) \bar{w}_{n-k+2} \quad \text{als } n \leq k. \end{aligned}$$

het gegeven element valt de eerder gevonden formules.

Merk op dat we in principe zo elke $Dix_{sk}(S)$

$= i! w_2(TS)$ kunnen behandelen.

In het geval, dat $n \leq k$, dan is het rekenwerk nog enigzins te doen: $\bar{y}_j$ is dan 1-dimensionaal.

Als de gegeven rekenfuncties gemaakt zijn, dan

$$\text{geldt } i! w_2(TS) = w_1^2(TM) \cdot \bar{w}_{n-k+1}(TM) + \left[\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} + nk \right] \cdot \bar{w}_{n-k+2}$$

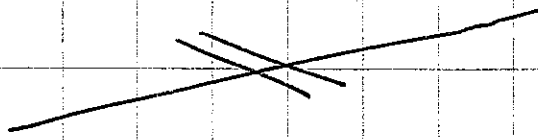
als $n \leq k$.

In het bijzonder, als S 2-dimensionaal is:

93

$$k = 2n - 3:$$

$$\chi(S) = \langle w_1^2(M) \cdot \bar{w}_{n-2}(M) + [(\frac{n}{2} + 1) \cdot \bar{w}_n(M), [M]] \rangle \mod 2.$$



Slot opmerkingen:

- 1) Met grote dank aan E. Menting, die me geholpen heeft met het in overeenstemming brengen van de berekening van $i_! w_1(TS)$ via de methodes onder A en B.
- 2) Men kan met bovenstaande formules 2n heel eenvoudig rekenen op termen van de vorm $i_! [\pi w_i^{2i}(TS)]$ (iets voor representatieve zwadegmiddelen). Het is echter van veel meer belang iets te weten van $i_!$.
Als n is en $(n-k)w_{n-k+2}(TM) = 0$ is dan S orienteerbaar?
- 3) Alles in deze paragraaf heeft betrekking op de inclusie van $\Sigma(\mathbb{Q})$ in M . Wat kan men weten van de discriminant? Herpden [8] heeft daarmee enkele resultaten (die ik echter nog niet begrijp.) Zijn daar ook Thom polynomen voor? Hoe berekent men die?
- 4) Er is over dit onderwerp nog heel veel te weten.

94.

Literatuurlijst.

- [1]: E. Akin; 'Stiefel-Whitney homology classes & bordism'
T.A.M.S. 205 (1975) 341-359
- [2]: A. Borel & A. Haefliger; 'La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique'; Bull. Soc. Math. Fr. 89 (1961) 461-513
- [3]: D. Chess; Poincaré-Hopf Type Theorems for Maps to $\mathbb{R}^2$, Arcata (?)
- [4]: J. Damon; 'Thom polynomials for contact class singularities'
Thesis, Harvard, 1972.
- [5]: C.G. Gibson; 'Singular Points of Smooth Mappings';
Pitman; 1979.
- [6]: M. Golubitsky & V. Guillemin; 'Stable mappings and their singularities'; Springer Verlag, 1973,
- [7]: A. Haefliger & A. Kosinski; 'Un théorème de Thom sur les singularités des applications différentiables';
Séminaire H. Cartan, E.N.S 1956-1957, exposé 8.
- [8]: J. Hayden; 'Some Global Properties of Singularities I: Thom Polynomials'; Warwick Univ. 1980.
- [9]: M. Hirsch; 'Differential Topology'; Springer, 1976.
- [10]: D. Husemoller; 'Fibre Bundles'; Springer, 1974.
- [11]: H.I. Levine; 'Elimination of Cusps'; Topology 3, (1965), 263.
- [12]: H.I. Levine; 'Mappings of Manifolds into the Plane',
Ann. J. Math. 88 (1966) 357-365.
- [13]: J. Milnor; 'Morse theory'; Princeton Univ. Press 1974
- [14]: J. Milnor & J.D. Stasheff; 'Characteristic Classes';
Princeton Univ. Press nr 76, 1974.

96. [15]: J. R. Porteous; 'Simple singularities and maps',
In: Proc. Liverpool Sing. Symp; Lecture Notes Vol 192.
- [16]: F. Ronga; 'Le calcul des classes duales aux
singularités de Borel-Moore d'ordre deux',
Comm. Math. Helv. vol 47, 1972, 15-35.
- [17]: R. Thom; 'Les singularités des applications
différentiables'; Ann. Inst. Fourier 6 (1955-1956) 43-87.
- [18]: D. Sullivan; 'Combinatorial invariants of
analytic spaces'; Proc. Liverpool Sing. Symp; Lecture
Notes 192; 169-168.
- [19]: J. M. Borel-Moore; 'Singularities and differentiable
maps'; I.M.E.S. 33 (1967).

Appendix A.

Stelling 1: Laat $\pi: E \rightarrow B$ een continue surjektieve afbeelding tussen topologische ruimten E & B .

Laat G een topologische groep, en stel dat E & B G -ruimten zijn (d.w.z. $\exists$ acties $G \times E \rightarrow E$; $G \times B \rightarrow B$)

Stel dat het onderstaande diagram commuteert:

$$\begin{array}{ccc} G \times E & \longrightarrow & E \\ \downarrow 1 \times \pi & & \downarrow \pi \\ G \times B & \longrightarrow & B \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} \text{M.a.w. } \pi(g.x) = g.\pi(x) \quad \forall g \in G, \forall x \in E; \\ \text{'vermenigvuldigen is } G\text{-morfisme'.} \end{array} \right)$$

Stel dat B lokale continue translatie functies heeft.

($\forall x \in B \exists U \text{ open } \ni x \mid \exists \text{ cont. fct } \tau: U \times U \rightarrow G$ z.d.d.
 $\tau(x', x)x = x'$; $\tau(x, x')\tau(x', x) = 1$;)

Dan is $\pi: E \rightarrow B$ een lokaal triviale vezelbundel.

Bewijs: Laat $y \in B$. Kies een U z.d.d. $\exists$ translatie fctie.

Definieer: $K: U \times F_y \rightarrow \pi^{-1}(U)$ ($F_y = \pi^{-1}(y)$)

$$(u, x) \longmapsto \tau(u, y)x$$

$$L: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F_y$$

$$z \longmapsto (\pi(z), \tau(y, \pi(z))z)$$

Duidelijk is dat K en L continu zijn.

$$\begin{aligned} \text{Er geldt: } L \circ K(u, x) &= L(\tau(u, y)x) = (\pi[\tau(u, y)x], \tau(y, \pi[\tau(u, y)x])\tau(u, y)x) \\ &= (\pi(\tau(u, y)x), \tau(y, \pi(\tau(u, y)x))\tau(u, y)x) \\ &= (\tau(u, y)\pi(x), \tau(y, \tau(u, y)\pi(x))\tau(u, y)x) \end{aligned}$$

Aangezien $x \in F_y$, $\pi(x) = y$. Er komt:

$$= (u, \tau(y, u)\tau(u, y)x) = (u, x).$$

$$\text{Zo ook: } K \circ L(z) = K(\pi(z), \tau(y, \pi(z))z)$$

$$= \tau(\pi(z), y)\tau(y, \pi(z))z = z.$$

98. M.a.w. k is een homeomorfisme.

Aanpak

$$\begin{array}{ccc} U \times F_Y & \xrightarrow{k} & \pi^{-1}(U) \\ & \searrow p_1 & \downarrow \pi \\ & & U \end{array}$$

kommutteert $(\pi k(u, x) = \pi(\tau(u, y)x) = \tau(u, y)\pi(x) = u = p_1(u, x))$
 zijn nu klaar. $\square$

Opmerking: met differentieerbaarheidseisen analoog.

Toepassing: X & Y gladde C^∞ -variëteiten

natuurlijke $\text{Diff}(X) \times \text{Diff}(Y)$ -actie op $X \times Y$ heeft, volgens het isotopy lemma lokale continue translatie functies.

Laat $J^k(X, Y)$ de k -jet ruimte heeft ook natuurlijke $\text{Diff}(X) \times \text{Diff}(Y)$ -actie, waarvoor het diagram kommutteert

Konklusie: $J^k(X, Y)$ is C^∞ vektorbundel over $X \times Y$ met vektorbundel $J^k(X, Y)_{p,q}$.

Laat E en B G -ruimten, dus $\exists$ acties.
 $G \times E \rightarrow E$; $G \times B \rightarrow B$ met de gebruikelijke eisen.

$\pi: E \rightarrow B$ heet G-morfisme indien:

$$\begin{array}{ccc} G \times E & \longrightarrow & E \\ 1 \downarrow \otimes \pi & \circlearrowleft & \downarrow \pi \\ G \times B & \longrightarrow & B \end{array} \quad \text{dus: } \boxed{\pi(g \cdot x) = g \cdot \pi(x)}$$

We noteren: $G(A) = \{g \in G \mid g \cdot a \in A \ \forall a \in A\}$ voor $A \subset E$ of B .
 $G(\{x\}) =: G(x)$

Eenkele identiteiten:

1. $G(x) = G(\pi^{-1}(x))$ voor $x \in B$; $G(A) = G(\pi^{-1}(A))$

n.l. ~~$a \in G(x) \Leftrightarrow \exists g \mid g \cdot x = a$~~ $a \in G(x) \Leftrightarrow a \cdot x = x$

Voor $y \in \pi^{-1}(x)$ geldt $\pi(y) = x$, dus $a \cdot \pi(y) = a \cdot x = x$
 $\hookrightarrow \pi(a \cdot y) = x \Rightarrow a \cdot y \in \pi^{-1}(x)$

2. $A \subset B \Rightarrow G(A) \supset G(B)$

Laat $y \in E$. Noteer $\text{Orb}_H(y) = \{g \cdot y \mid g \in H\}$ voor $H \subset G$

3. $\text{Orb}_G(x) \cap F_{\pi(x)} = \text{Orb}_{G(\pi(x))}(x)$.

$$\begin{aligned} (\{g \cdot x \mid g \in G\} \cap \{y \in E \mid \pi(y) = \pi(x)\}) &= \{g \cdot x \mid g \in G \ \& \ \pi(g \cdot x) = \pi(x)\} \\ &= \{g \cdot x \mid g \in G \ \& \ g \cdot x = \pi(x)\} = \text{Orb}_{G(\pi(x))}(x) \end{aligned}$$

4. $\bigcup_{y \in B} \text{Orb}_G(x) \cap F_y = \text{Orb}_G(x)$.

Kies voor $\forall y$ een g_y z.d.d. $\pi(x) = g_y \cdot y$

$$\text{Orb}_{G(x)} \cap F_y = \{g \cdot x \mid g \in G \ \& \ \pi(g \cdot x) = y\}$$

$$= \{g \cdot x \mid g \in G \ \& \ g \cdot g_y \cdot y = y\} = \{g \cdot x \mid g g_y \in G(y)\}$$

$$\pi g_y^{-1} \cdot x = g_y^{-1} \pi(x) = y$$

$$= \{g g_y g_y^{-1} x \mid g g_y \in G(y)\}$$

$$= \text{Orb}_{G(y)}(g_y^{-1} \cdot x)$$

5. $\text{Orb}_G(x) = \bigcup_{y \in B} \text{Orb}_{G(y)}(g_y^{-1} \cdot x)$

Stelling 2: Situatie als in Stelling 1.

wd.

Laat $x \in E$. Noteer restrictie van π tot $\text{Orb}_G(x)$ naar
met $\pi : \text{Orb}_G(x) \longrightarrow \pi(\text{Orb}_G(x)) \subset B$.

Dan $\text{Orb}_G(x)$ is lokaal triviale vectorbundel met vector
basis $\gamma : \text{Orb}_{G(y)}(x)$.

Bewijs: Laat $y \in \pi(\text{Orb}_G(x))$ zeg $y = \pi(x)$ (Orb is een baan!).

Definieer $\psi : U \times \text{Orb}_{G(y)}(x) \longrightarrow \text{Orb}_G(x) \cap \pi^{-1}(U)$
 $(u, \gamma \cdot x) \longmapsto \tau(u, \gamma) \cdot x$

Duidelijk: $\tau(u, \gamma) \cdot x \in \text{Orb}_G(x)$ & $\pi(\tau(u, \gamma) \cdot x) = \tau(u, \gamma) \pi(x)$

Omdat $\gamma \in G(y)$: $\tau(u, \gamma) \pi(x) = \tau(u, \gamma) y = u$.

Dus $\tau(u, \gamma) \cdot x \in \text{Orb}_G(x) \cap \pi^{-1}(U)$.

$\varphi : \text{Orb}_G(x) \cap \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \text{Orb}_{G(y)}(x)$
 $hx \longmapsto (\pi(hx), \tau(\gamma, \pi(hx)) \cdot hx)$

Ook φ is goed gedefinieerd: $\varphi(\tau(\gamma, \pi(hx)) \cdot hx) =$

$\tau(\gamma, \pi(hx)) \pi(hx) = y$ zodat inderdaad $\tau(\gamma, \pi(hx)) \cdot h \in G(y)$

$[\tau(\gamma, \pi(hx)) \cdot h] y = \tau(\gamma, h \pi(x)) h y = y$ zodat inderdaad
 $\tau(\gamma, \pi(hx)) \cdot h \in G(y)$.

Verder zijn φ & ψ inverse en continue (als set) $\square$

Afgeleverd

————— 0 —————

We zijn geïnteresseerd in de structuur van de verzameling

$$\Sigma^i = \{ f \in \text{Hom}(V, W) \mid \dim(\ker f) = i \}$$

Beschouw het diagram:

$$\begin{array}{ccc} E(V) & \dashrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(i, V) & \xrightarrow{\pi} & \text{pt} \end{array}$$

Over $G(i, V)$ hebben we het volgende exacte rijtje v. vektorbundels:

$$0 \rightarrow E(V) \rightarrow \pi^*(V) \rightarrow N(V) \rightarrow 0.$$

voor een i -vlak K staat er: $0 \rightarrow K \rightarrow V \rightarrow N_K \rightarrow 0.$

Dit levert $0 \rightarrow \text{hom}(N_K, W) \rightarrow \text{hom}(V, W) \rightarrow \text{hom}(K, V) \rightarrow 0. \quad (*)$

$$0 \rightarrow \text{HOM}(N, W) \rightarrow \text{HOM}(V, W) \rightarrow \text{HOM}(K, V) \rightarrow 0.$$

van bundels over $G(i, V)$

Beschouw de deelbundel $\frac{R}{\text{van}} \text{HOM}(N, W)$

$$R = \{ (K, \alpha) \in G(i, V) \times \text{hom}(N_K, W) \mid \text{rang}(\alpha) \text{ maximaal} \}.$$

$$\text{verel } R_K = \{ \alpha \in \text{hom}(N_K, W) \mid \text{maximale rang} \}.$$

$$\text{Laat } j: R_K \rightarrow \text{hom}(V, W)$$

Er geldt: $\text{nl. } j_K: R_K \rightarrow \text{hom}(V, W)$ injectief

$$\text{z. na } j_K = \{ \alpha \in \text{hom}(V, W) \mid \ker \alpha = K \}$$

Voor de veredeling $R \rightarrow G(i, V)$ hebben we het volgende exacte rijtje:

$$0 \rightarrow T(R_K)_B \rightarrow T(R)_B \rightarrow T(G(i, V))_K \rightarrow 0.$$

met $B \in R_K$

$$\text{Laat nu. } A \quad 0 \rightarrow \ker A \rightarrow V \xrightarrow{A} W \rightarrow \text{coker } A \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & T(R_K)_B & \xrightarrow{i} & T(R)_B & \rightarrow & T(G(i, V))_K \rightarrow 0 \\ & & \vdots & & \downarrow dj & & \vdots \\ 0 & \rightarrow & dj(i(T(R)_B)) & \rightarrow & \text{Thom}(V, W)_A & \rightarrow & ? \end{array}$$

102. N_K is: 1. R_K open deel van $\text{hom}(N_K, W)$. We identificeren $T(R_K)_B$ met $\text{hom}(N_K, W)$.

2. $T(G(i, V))_K = \text{hom}(K, N_K)$ (standard.)

3. $d_j i$ injectief. Onder de identificatie onder 1 en $T\text{hom}(V, W)_A$ is dit juist de afbeelding $0 \rightarrow \text{hom}(N_K, W) \rightarrow \text{hom}(V, W) \rightarrow \text{hom}(K, W) \rightarrow 0$ (*).

Het volgende diagram ontstaat:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & T(R_K)_B & \rightarrow & T(R)_B & \rightarrow & \text{hom}(K, N_K) \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \vdots \\
 0 & \rightarrow & \text{hom}(N_K, W) & \rightarrow & \text{hom}(V, W) & \rightarrow & \text{hom}(K, W) \rightarrow 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \text{hom}(K, \text{coker } A)
 \end{array}$$

De laatste rij is: $0 \rightarrow N_K \xrightarrow{A} W \rightarrow \text{coker } A \rightarrow 0$

$$\begin{array}{ccc}
 & & \uparrow \\
 0 \rightarrow K & \rightarrow & V
 \end{array}$$

Conclusie: $T(R)_B \xrightarrow{d_j} T\text{hom}(V, W)_A$ injectief

$$0 \rightarrow T(R)_B \xrightarrow{d_j} T\text{hom}(V, W)_A \rightarrow \text{hom}(\text{ker } A, \text{coker } A) \rightarrow 0$$

Conclusie: d_j immersie is

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow T(R)_B & \rightarrow & T\text{hom}(V, W)_A & \rightarrow & \text{hom}(\text{ker } A, \text{coker } A) & \rightarrow & 0 \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
 0 \rightarrow T(\Sigma^i)_A & \rightarrow & T\text{hom}(V, W)_A & \rightarrow & N(\Sigma^i)_A & &
 \end{array}$$

de normaal bundel van Σ^i in $\text{hom}(V, W)$ is kanoniek isomorf met $\text{hom}(\text{ker } A, \text{coker } A)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \downarrow & T(\Sigma^i) & \rightarrow & T\text{hom}(V, W) & \rightarrow & N(\Sigma^i) & \rightarrow 0 \\
 & & & & & \parallel & \\
 & & & & & \text{hom}(\text{ker}, \text{coker}) &
 \end{array}$$

goal a. $\dim X \leq \dim Y$; $s \leq r$ $\boxed{(1+s)r^2 + ((1+s)e - \frac{1}{2}s(s+1))r + \frac{s(s-1)e + s^2}{2}}$

$$s=0: r^2 + er \quad s=2: 3r^2 + (3e-3)r + e + 4 \quad s=4: 5r^2 + (5e-10)r + 6e + 6$$

$$s=1: 2r^2 + (2e-1)r + 1 \quad s=3: 4r^2 + (4e-6)r + 3e + 9 \quad s=5: 6r^2 + (6e-15)r + 10e + 10$$

$$e=0: s=0: r^2 ; s=1: 2r^2 - r + 1 ; s=2: 3r^2 - 3r + 4 ; s=3: 4r^2 - 6r + 9 ; s=4: 5r^2 - 10r + 16$$

$$s=5: 6r^2 - 15r + 25$$

tabel:

$r \backslash s$	0	1	2	3	4	5
0	0					
1	1	2				
(e=0) 2	4	7	10			
3	9	16	22	27		
4	16	29	40	49	56	
5	25	46	64	79	91	100

$$S_{r,r}: (r+1)r^2 + (-\frac{1}{2}r(r+1))r + r^2$$

$$r^2 [1+r - \frac{1}{2}(r+1) + 1]$$

$$r^2 [2 + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}] = r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (r+3)$$

$$S_{r,r}(e=0): \frac{1}{2} r^2 (r+3)$$

$$e=1: s=0: r^2 + r ; s=1: 2r^2 + r + 1 ; s=2: 3r^2 + 5 ; s=3: 4r^2 + -2r + 12$$

$$s=4: 5r^2 - 5r + 22 ; s=5: 6r^2 - 9r + 35$$

tabel

$r \backslash s$	0	1	2	3	4	5
0	0					
1	2	4				
2	5	11	17			
3	12	22	32	42		
4	20	37	53	68	82	
5	30	56	80	102	122	140

$$S_{r,r}(e=1): (r+1)r^2 + (r+1 - \frac{1}{2}r(r+1))r$$

$$+ \frac{r(r-1)}{2} + r^2$$

$$: r^3 + r^2 + r^2 + r - \frac{1}{2}r^2(r+1)$$

$$+ \frac{1}{2}r^2 - \frac{r}{2} + r^2$$

$$= \frac{1}{2}r^3 + 3r^2 + \frac{1}{2}r$$

$$= \frac{1}{2}r [r^2 + 6r + 1]$$

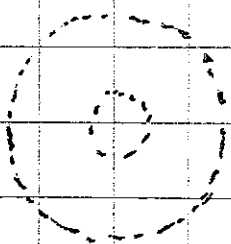
$$= \frac{1}{2} \cdot 5 (25 + 30 + 1) \quad 5 \cdot 28 = 140.$$

In deze paragraaf zal ik een idee proberen te geven van het begrip 'gesloten draager homologie'. Eventuele onjuistheden komen geheel voor mijn rekening; ik heb namelijk, stom genoeg, geen begrijpelijke definitie van dit begrip kunnen vinden. (Wel onbegrijpelijke; zie [2])

Poincaré dualiteit voor variëteiten.

Het zal de lezer bekend zijn dat voor een compacte variëteit M van dimensie n het Poincaré homomorfisme $P: H^k(M) \rightarrow H_{n-k}(M)$ een isomorfisme is. (coëfficiënten steeds voor de goede verstaander $\mathbb{Z}$ of $\mathbb{Z}_2$) Essentieel is die compactheid: voor niet compacte M is het gewoon vaak niet waar.

Voorbeeld: M is de open cilinder



$$\begin{array}{ll} H_0(M) = \mathbb{Z} & H^0(M) = \mathbb{Z} \\ H_1(M) = \mathbb{Z} & H^1(M) = \mathbb{Z} \\ H_2(M) = 0 & H^2(M) = 0 \end{array}$$

De oorzaak is in feite dat de (singuliere) homologie compact gedragen wordt: $H_k(A, B) = \varinjlim_{C \supset A, D \supset B} H_k(C, D)$ C, D compact.

Het Poincaré homomorfisme komt tot stand door cap product nemen met een 'fundamentele' klasse

$$\cap: H^k(X, A) \otimes H_n(X, A \cup B) \rightarrow H_{n-k}(X, B)$$

Voor een niet compacte X kunnen we altijd voor elke compacte K een fundamentele klasse $\omega_K \in H_n(X, X-K)$

met de goede lokale eigenschappen vinden.

Om tot dualiteit te komen kunnen we nemen

$A = X - K$ en $B = \emptyset$ nemen. Dan:

$$\gamma: H^k(X, X-K) \otimes H_n(X, X-K) \rightarrow H_{n-k}(X)$$

Door nu directe limiet over alle compacta K te

nemen krijgt men $P: H_c^k(X) \xrightarrow{\sim} H_{n-k}(X)$

waarbij $H_c^k(X) := \varinjlim_{K \subset X \text{ compact}} H^k(X, X-K)$

de z.g. cohomologie met compacte draager (de afgeleide (simpliciale) cohomologie is niet compact afgeleide; de dragers zijn slecht gesloten), en de dualiteit is afgeleid. De groepen H_c^k hebben echter enkele minder prettige eigenschappen: het zijn slechts propre homotopie invarianten en de H_c^k lijkt meer op een homologie theorie.

Een andere manier om de dualiteit te redden is:

nemen $A = \emptyset$ & $B = X - K$. Dan:

$$\gamma: H^k(X) \otimes H_n(X, X-K) \rightarrow H_{n-k}(X, X-K)$$

Door nu inverse limiet over alle compacta te

nemen krijgt men: $P: H^k(X) \xrightarrow{\sim} H_{n-k}^*(X)$

met $H_k^*(X) = \varinjlim_{K \subset X} H_k(X, X-K)$ de homologie

met 'gesloten draager'. Natuurlijk lijdt H_k^* aan dezelfde soort problemen als H_c^k : slechts voor

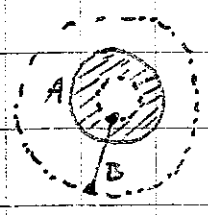
propre $f: X \rightarrow Y$ krijgen we een $f_*: H_*^*(X) \rightarrow H_*^*(Y)$

etc. Toch is dit in veel situaties te overwinnen

kenen het werken met H_c^* ; het komt nogal eens voor in de vector bundel theorie dat we willen

te herkennen. Ook blijft, omdat we niet afbreken
 homologie verken $\pi^*: H^*(E) \rightarrow H^*(X)$ voor een vector-
 bundel $E \rightarrow X$ een isomorfisme in termen van de
 ringstructuur.

Voorbeeld:



$H_0 = \mathbb{Z}$	$H_0^0 = 0$	$H_0^0 = 0$	$H^0 = \mathbb{Z}$
$H_1 = \mathbb{Z}$	$H_1^0 = \mathbb{Z}$	$H_1^0 = \mathbb{Z}$	$H^1 = \mathbb{Z}$
$H_2 = 0$	$H_2^0 = \mathbb{Z}$	$H_2^0 = \mathbb{Z}$	$H^2 = 0$

In de gesloten draaier homologie is A een rand gekend,
 terwijl B als nieuwe voortbrenger verschijnt.

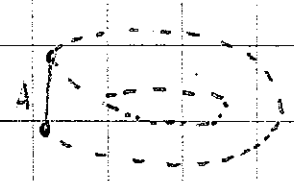
Merks op dat nu elke variëteit een framewerk
 klasse in $H_n^*(X)$ bezit.

Verder kopt voor een compacte variëteit met rand
 vol alles wat de klassieke relaties bezit.

$$H_n^{rel}(M, \partial M) \xrightarrow{\sim} H_{n-1}(M)$$

$$H^q(M) \xrightarrow{\sim} H_{n-q}(M, \partial M) = H_{n-q}^{rel}(M, \partial M)$$

2e voorbeeld: Möbius band (open)



De Möbius band is niet 2-orientabel en
 we hebben de 1e Stiefel-Whitney
 klasse $w_1(TM) \in H^1(M; \mathbb{Z}_2)$ die $\neq 0$ is.

De corresponderende gesloten homologie klasse
 wordt afgebeeld door A.

Talpassen van Formule I uit § 5.4 leert dat voor
 een $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$ moet gelden: $DL_x[\tilde{S}'(t)] = v_1(TM)$

De gewone 'plat trek' afbeelding van M op $\mathbb{R}^2$
 leert inderdaad de dualen van $w_1(TM)$, welk het lijnstuk
 A, als singuliere afbeelding beschouwen

108 De afbeelding gesuggereerd door



heeft echter de centrale cirkel als singuliere verzameling.

In de afsluiten draager homologie zijn deze
zelfs een homologie:

